О ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЯХЪ.

М. Г. БАРАНЕЦКАГО.

Marjan Aleksander Baraniecki
* 1848 + 1895

МОСКВА.

1873.

О ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЯХЪ.

М. Г. БАРАНЕЦКАГО.

МОСКВА.
Въ Университетской типографіи (Катковъ и К°),
на Страстномъ бульварѣ.
1873.

Дозволено цензурою. Москва 18 апрѣля 1873 года.

Въ представленномъ 1778 г. С.-Петербургской Академіи Наукъ мемуарѣ подъ заглавіемъ *Specimen transformationis singularis serierum* [1]), Эйлеръ посредствомъ дифференціальнаго уравненія

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0, \qquad (1)$$

которому удовлетворяетъ рядъ

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots, \qquad (2)$$

нынѣ извѣстный подъ именемъ гипергеометрическаго, выводитъ одно такое преобразованіе ряда (2), при которомъ новый рядъ не перестаетъ имѣть всѣхъ признаковъ ряда гипергеометрическаго. Этимъ выводомъ положилъ Эйлеръ начало обширнымъ изслѣдованіямъ свойствъ гипергеометрическаго ряда, на возможность и значеніе которыхъ указываетъ онъ въ вышеупомянутомъ трудѣ своемъ, говоря: „Cum autem methodus, qua hanc egregiam transformationem sumus adepti, maxime sit obliqua et per ambages longas procedat, maxime optandum esset, ut alia methodus magis directa et naturalis detegeretur, quo utique in Analysin haud contemnendum incrementum inferretur. Fateor autem me hactenus in hac investigatione frustra laborasse“.[2])

---

[1]) *Nova Acta Academiae Imperialis Petropolitanae.* Tomus XII (1801).
[2]) pag. 63.

Десять лѣтъ спустя послѣ появленія труда Эйлера, Гауссъ, въ мемуарѣ *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma} x + \ldots$ *Pars prior* [1]), а отчасти и въ *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* [2]), приступилъ къ болѣе подробной разработкѣ свойствъ этого ряда, обозначивъ его символомъ $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Вторая часть перваго изъ поименованныхъ сочиненій Гаусса была въ первый разъ напечатана подъ редакціей Шеринга въ третьемъ томѣ полнаго собранія его сочиненій, подъ заглавіемъ *Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis*. Результаты, къ которымъ Гауссъ приходитъ въ этомъ трудѣ, были еще раньше опубликованы Куммеромъ въ обширномъ его сочиненіи *Ueber die hypergeometrische Reihe* $1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma} +$ etc.[3]), въ которомъ авторъ задался цѣлью [4]) вывести связи между гипергеометрическими рядами съ разными четвертыми аргументами. Выполненіе этой задачи посредствомъ пріемовъ, употребленныхъ Куммеромъ, оказалось невозможнымъ; такъ напр. въ случаѣ, гдѣ между аргументами α, β и γ предполагается одна только линейная связь.

$$\alpha + n'\beta + n''\gamma + n''' = 0, \tag{3}$$

n', n'', n''', цѣлыя числа, Куммеръ получаетъ 288 частныхъ интеграловъ дифференціальнаго уравненія (1)[5]), которые слѣдовало-бы различнымъ образомъ связать

---

[1]) *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis*, vol. II; *Gauss Werke*, III Band.

[2]) *Commentationes* etc., vol. III; *Werke*, III B.

[3]) *Journal fuer Mathematik* von Crelle. XV Band.

[4]) pag. 39.

[5]) pag. 74.

между собой. Предположивши же, что эти три аргумента удовлетворяютъ двумъ такимъ условіямъ (3), а также, что ни одинъ изъ аргументовъ не остается произвольнымъ, Куммеръ даже не выводитъ числа интеграловъ дифференціальнаго уравненія (1) и ограничивается лишь представленіемъ нѣкоторыхъ изъ возможныхъ связей между ними [1]. Главная однакожь заслуга труда Куммера, заключается въ томъ, что, кромѣ указаній на нѣкоторыя приложенія, онъ выводитъ 24 вида интеграловъ дифференціальнаго уравненія (1), при независимыхъ другъ отъ друга аргументахъ α, β и γ; но методъ выведенія этихъ интеграловъ, какъ авторъ отчасти самъ сознаетъ [2], недостаточно общъ, такъ что первымъ строгимъ ихъ выводомъ слѣдуетъ считать тотъ, который данъ Якоби въ мемуарѣ *Untersuchungen ueber die Differenzialgleichung der hypergeometrischen Reihe*. Этотъ мемуаръ, напечатанный послѣ смерти автора подъ редакціей Гейне, сначала въ LVI томѣ журнала Креля, а затѣмъ въ третьемъ томѣ сочиненій Якоби, заключаетъ еще указанія на замѣчательныя свойства конечныхъ гипергеометрическихъ рядовъ.

Конечные ряды (2) представляютъ раціональныя функціи отъ x. Безконечными же рядами (2) для точекъ координатной плоскости перемѣнной x, находящихся внутри круга, описаннаго изъ точки $x=0$ радіусомъ равнымъ единицѣ, могутъ быть представлены многія трансцендентныя функціи. Изслѣдуя свойства такихъ функцій отъ x, которыя для значеній x, имѣющихъ модуль меньше единицы, могутъ быть представлены гипергеометрическимъ рядомъ (2) и которыя, поэтому, могутъ быть названы гипергеометрическими функціями

---

[1]) Abschnitt IV.

[2]) pag. 47.

и обозначены символомъ $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$—если ихъ не разсматривать въ разныхъ вѣтвяхъ, какъ это дѣлаетъ Риманнъ [1])—слѣдуетъ прежде всего опредѣлить, для какихъ значеній перемѣнной x гипергеометрическая функція $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ остается всегда конечною, сплошною и однозначною, и какъ вычислять ея значенія для точекъ координатной плоскости перемѣнной x, лежащихъ внѣ круга сходимости ряда (2). Этимъ я занимаюсь въ первыхъ двухъ главахъ настоящей работы. Въ третьей представляю нѣкоторыя примѣры гипергеометрическихъ функцій. Въ двухъ же послѣднихъ занимаюсь разложеніемъ отношеній гипергеометрическихъ функцій

$$\frac{F(\alpha+\vartheta, \beta+\eta, \gamma+\zeta, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)},$$

гдѣ ϑ, η и ζ цѣлыя числа, въ непрерывныя дроби, сходящіяся къ этимъ отношеніямъ для всѣхъ тѣхъ значеній x, для которыхъ гипергеометрическія функціи, имѣющія x четвертымъ аргументомъ, остаются конечными, сплошными и однозначными, и которыя не обращаютъ въ нуль функцію $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

---

[1]) *Abhandlungen der Koeniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Goettingen*, VII Band.

§ 1. Частнымъ интеграломъ дифференціальнаго уравненія

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)x\right]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0, \qquad (1)$$

при произвольныхъ аргументахъ α, β и γ, является рядъ

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots, \qquad (2)$$

называемый гипергеометрическимъ рядомъ.

Полагая въ уравненіи (1)

$$y=Ax^{\nu}+A_1x^{\nu+1}+A_2x^{\nu+2}+\cdots, \qquad (3)$$

изъ равенства нулю коеффиціента при $x^{\nu-1}$ получимъ

$$(\nu-1)\nu A+\gamma\nu A=0.$$

Если принять

$$A=0,$$

то изъ равенствъ нулю слѣдующихъ коеффиціентовъ слѣдовало-бы

$$A_1=A_2=\cdots=0,$$

такъ, что остается принять или

$$\nu=0,$$

или

$$\nu=1-\gamma.$$

При первомъ значеніи для показателя ν, изъ слѣдующихъ коеффиціентовъ выводимъ

$$\gamma A_1 - \alpha\beta A = 0,$$
$$(\gamma+1)A_2 - (\alpha+1)(\beta+1)A_1 = 0.$$
$$etc.$$

На основаніи этихъ соотношеній, разложеніе (3) приметъ видъ

$$y_1 = A\left(1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots\right), \tag{4}$$

гдѣ величина A есть постоянная интегрированія. Пока рядъ (2) есть сходящійся, выраженіе (4) представляетъ частный интегралъ уравненія (1). При $\nu = 1-\gamma$ получаемъ другой частный интегралъ

$$y_2 = A' x^{1-\gamma}\left(1 + \frac{(\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)}{1(2-\gamma)}x\right.$$
$$\left. + \frac{(\alpha+1-\gamma)(\alpha+2-\gamma)(\beta+1-\gamma)(\beta+2-\gamma)}{1.2(2-\gamma)(3-\gamma)}x^2 + \cdots\right),$$

рядъ котораго есть также гипергеометрическій.

Изъ этого видимъ, что гипергеометрическій рядъ (2) опредѣляется дифференціальнымъ уравненіемъ (1), которому удовлетворяетъ, при условіи, что для значенія $x=0$ имѣется

$$y = 1,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}.$$

§ 2. Если въ ряду

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots \tag{2}$$

аргументамъ α или β даны значенія нуля или какого нибудь цѣлаго отрицательнаго числа, которому не равно γ, то рядъ этотъ будетъ составленъ изъ конечнаго числа $1-\alpha$ или $1-\beta$ первыхъ его членовъ и представляетъ раціональную функ-

цію. При α или β равныхъ цѣлому отрицательному числу $-m$, аргументъ γ не можетъ быть такимъ цѣлымъ отрицательнымъ числомъ, численное значеніе котораго меньше m; во всѣхъ остальныхъ случаяхъ аргументъ γ не можетъ равнятся цѣлому отрицательному числу. Въ случаѣ, когда $\alpha=\gamma=-m$, или $\beta=\gamma=-m$, гдѣ m цѣлое положительное число, можемъ дать въ ряду (2) какія нибудь значенія аргументамъ α и γ или аргументамъ β и γ, такъ что вообще можемъ принять, что въ безконечныхъ гипергеометрическихъ рядахъ аргументъ γ не равняется ни нулю, ни цѣлому отрицательному числу.

Если аргументы α и β не равны ни нулю ни цѣлому отрицательному числу, то многія трансцендентныя функціи могутъ быть представлены посредствомъ безконечнаго ряда (2), пока онъ есть сходящійся.

Такъ какъ въ ряду (2) отношеніе $(m+1)$-аго члена къ предыдущему есть

$$\frac{(\alpha+m-1)(\beta+m-1)}{m(\gamma+m-1)}x=\frac{\left(1+\frac{\alpha-1}{m}\right)\left(1+\frac{\beta-1}{m}\right)}{1+\frac{\gamma-1}{m}}x,$$

и оно, при безконечно возрастающемъ m, приближается къ $1.x$, то рядъ этотъ для значеній перемѣнной x, модуль которыхъ больше единицы, есть расходящійся; для значеній же—меньше единицы, рядъ этотъ будетъ сходящійся.

Свойства ряда (2) подробнѣе были въ первый разъ разсматриваемы Гауссомъ въ *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* etc., и поэтому рядъ этотъ носитъ также названіе Гауссоваго ряда *). Рядъ (2) Гауссомъ обозначенъ символомъ $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, при условіи, что роль аргументовъ въ ряду зависитъ отъ порядка, въ которомъ они стоятъ въ символѣ; а такъ какъ рядъ (2) симметриченъ относительно ар-

*) Гауссъ самъ вторую часть упомянутой работы озаглавилъ: Determinatio seriei *nostrae* etc.

гументовъ α и β, то символы $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ и $F(\beta,\alpha,\gamma,x)$ представляютъ тотъ самый рядъ, такъ что тождественно

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = F(\beta,\alpha,\gamma,x).$$

Изъ ряда (2) видно, что

$$\frac{d}{dx}F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x). \qquad (5)$$

§ 3. Символу $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ можемъ придать болѣе обширное значенiе, а именно значенiе той функцiи, которая для значенiй перемѣнной x, имѣющихъ модуль меньше единицы, представляется гипергеометрическимъ рядомъ

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots \qquad (2)$$

Эту функцiю $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ назовемъ гипергеометрическою функцiею.

На основанiи вышесказаннаго (§ 1), можемъ гипергеометрическую функцiю $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ опредѣлить дифференцiальнымъ уравненiемъ

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \Big[\gamma - (\alpha+\beta+1)x\Big]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0, \qquad (1)$$

при условiи, что для $x = 0$

$$y = 1,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}.$$

Чтобъ опредѣлить для какихъ значенiй перемѣнной x гипергеометрическая функцiя $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ остается конечною, сплошною и однозначною, *) займемся сперва выраженiемъ

*) Такъ какъ конечными рядами (2) представляются рацiональныя функцiи, и такъ какъ въ безконечныхъ рядахъ (2) можно принять, что аргументъ γ не равняется ни нулю, ни цѣлому отрицательному числу (§ 2), то въ слѣдующей главѣ [гдѣ опредѣляется для какихъ значенiй перемѣнной x, функцiи, удовлетворяющiя уравненiю (1), остаются конечными, сплошными и однозначными], примемъ, что аргументъ γ не равенъ ни нулю, ни цѣлому отрицательному числу.

общаго интеграла дифференціальнаго уравненія (1), при какихъ нибудь значеніяхъ аргументовъ α, β и γ, посредствомъ двухъ опредѣленныхъ интеграловъ *).

I.

§ 4. Въ ряду

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\cdots$$

$$=1+\sum_m \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{1.2\ldots m.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)}x^m$$

$(m+1)$—ый членъ можетъ быть посредствомъ функціи $\Gamma(x)$ преобразованъ слѣдующимъ образомъ

$$\frac{\alpha\ldots(\alpha+m-1)\beta\ldots(\beta+m-1)}{1.2\ldots m.\gamma\ldots(\gamma+m-1)}x^m$$

$$=\frac{\alpha\ldots(\alpha+m-1)}{1.2\ldots m}\frac{\Gamma(m+\beta)}{\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(m+\gamma)}x^m,$$

$$=\frac{\alpha\ldots(\alpha+m-1)}{1.2\ldots m}\frac{\Gamma(m+\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(m+\gamma)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}x^m,$$

$$=\frac{\alpha\ldots(\alpha+m-1)}{1.2\ldots m}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}x^m\int_0^1 u^{m+\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\,du,$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\left[\frac{\alpha\ldots(\alpha+m-1)u^m}{1.2\ldots m}x^m\right]du.$$

---

*) Дифференціальное уравненіе (1) есть частный случай разбираемаго Ліувиллемъ въ его трудѣ: *Mémoire sur l'intégration de l'équation*

$$(mx^2+nx+p)\frac{d^2y}{dx^2}+(qx+r)\frac{dy}{dx}+sy=0$$

à l'aide de différentielles à l'indices quelconques. (*Journal de l'école polytech.*, XXI *Cahier*), но интегрированіе уравненія (1) по методу Ліувилля представляетъ дѣйствительныя выгоды только тогда, когда аргументы α и β, корни уравненія

$$m(\mu+1)\mu-q\mu+s=0,$$

суть цѣлыя числа.

Но функція

$$\frac{\alpha \ldots (\alpha+m-1)}{1.2\ldots m} u^m$$

есть коеффиціентъ при x^m въ разложеніи функціи

$$(1-xu)^{-\alpha}$$

по восходящимъ степенямъ произведенія xu; поэтому функція

$$(1-xu)^{-\alpha}$$

есть производящая тѣхъ функцій въ каждомъ изъ членовъ второй части равенства

$$1+\sum_m \frac{\alpha \ldots (\alpha+m-1)\beta \ldots (\beta+m-1)}{1\ldots m.\gamma \ldots (\gamma+m-1)} x^m$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\Big[1+$$

$$+\sum_m \frac{\alpha \ldots (\alpha+m-1)u^m}{1.2\ldots m} x^m\Big] du, \qquad (1)$$

которыя, будучи коеффиціентами при x^m, зависятъ отъ m. Слѣдовательно, такъ какъ

$$1+\sum_m \frac{\alpha \ldots (\alpha+m-1)}{1.2\ldots m} u^m x^m = (1-xu)^{-\alpha},$$

то

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\cdots$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\, du. \qquad (2)$$

Аргументъ γ не равняется ни нулю, ни какому нибудь цѣлому отрицательному числу; слѣдовательно величина $\Gamma(\gamma)$ есть конечная величина. Что же касается чиселъ β и $\gamma-\beta$, то изъ перваго члена суммы, находящейся во второй части равенства (1),

$$\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1} du,$$

слѣдуетъ, что величины β и $\gamma-\beta$ положительны, если онѣ вещественны, а если онѣ комплексны, то положительны ихъ вещественныя части.

Если вещественная часть числа $\gamma-\alpha-\beta$ положительна, то изъ формулы (2) слѣдуетъ, что

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-\alpha-1}\,du,$$

или

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}. \qquad (3)$$

Если вещественныя части чиселъ β и $\gamma-\beta$ не будутъ положительны, но положительны вещественныя части чиселъ α и $\gamma-\alpha$, то, на основанiи симметричности гипергеометрическаго ряда относительно аргументовъ α и β, вмѣсто равенства (2) можно вывести слѣдующее

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\cdots$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}du. \qquad (2')$$

Въ случаѣ же, когда вещественныя части какъ чиселъ β и $\gamma-\beta$, такъ и чиселъ α и $\gamma-\alpha$ не будутъ положительными, гипергеометрическiй рядъ не можетъ быть по формулѣ (2) представленъ въ видѣ конечнаго интеграла.

§ 5. Интегралъ

$$\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du \qquad (4)$$

представляетъ сумму функцiй отъ x, изъ которыхъ каждая остается конечною, сплошною и однозначною во всей координатной плоскости перемѣнной x, исключая прямой, соединяющей двѣ точки $\frac{1}{u}$ и ∞, которыя, при различныхъ значенiяхъ показателя α, могутъ быть точками развѣтвленiя или

разрыва этой функціи. Но такъ какъ u принимаетъ всѣвозможныя значенія отъ 0 до 1, то $\frac{1}{u}$ принимаетъ всѣвозможныя значенія отъ 1 до ∞; слѣдовательно, линія, соединяющая точку 1 съ ∞ представляетъ геометрическое мѣсто точекъ развѣтвленія или разрыва всѣхъ элементовъ интеграла (4), разсматриваемыхъ какъ функціи отъ x. Поэтому, интегралъ (4) есть функція конечная, сплошная и однозначная во всѣхъ точкахъ координатной плоскости перемѣнной x, не лежащихъ на прямой $+1 \ldots +\infty$.

§ 6. Для того чтобъ узнать, не удовлетворяетъ-ли интегралъ

$$y = \int_a^b u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-xu)^{-\alpha} du \tag{5}$$

уравненію

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0. \tag{6}$$

при другихъ значеніяхъ для a и b, чѣмъ 0 и 1, поступимъ слѣдующимъ образомъ.

При постоянныхъ a и b, изъ опредѣленнаго интеграла (5) получаемъ

$$\frac{dy}{dx} = \alpha \int_a^b \frac{u^\beta (1-u)^{\gamma-\beta-1}}{(1-xu)^{\alpha+1}} du, \tag{7}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha(\alpha+1) \int_a^b \frac{u^{\beta+1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}}{(1-xu)^{\alpha+2}} du \tag{8}$$

Въ производной по u функціи

$$-\alpha \frac{u^\beta (1-u)^{\gamma-\beta}}{(1-xu)^{\alpha+1}} = U, \tag{9}$$

т.-е. въ выраженіи

$$\frac{dU}{du} = -\alpha \frac{u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}}{(1-xu)^{\alpha+2}} [\beta(1-u)(1-xu) - (\gamma-\beta)u(1-xu) + (\alpha+1)u(1-u)x] \tag{10}$$

общій множитель есть тотъ самый, что въ подъинтегральныхъ функціяхъ интеграловъ (5), (7) и (8); выраженіе же въ скобкахъ можетъ быть представлено такъ

$$-x(1-x)(\alpha+1)u^2-[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]u(1-xu)+\beta(1-xu)^2, \quad (11)$$

что вставляя въ (10) и интегрируя, приходимъ, на основаніи (5), (7), (8) и (9), къ слѣдующему:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y$$

$$=-\alpha\Big[u^\beta(1-u)^{\gamma-\beta}(1-xu)^{-\alpha-1}\Big]_{u=a}^{u=b} \quad (12)$$

Изъ этого уравненія заключаемъ, что значенія перемѣнной u, обращающія вторую его часть въ нуль (при соблюденіи нѣкоторыхъ условій для показателей), будутъ предѣлами a и b, между которыми взятый интегралъ (5) удовлетворяетъ уравненію (6).

Изъ выраженія

$$\alpha u^\beta(1-u)^{\gamma-\beta}(1-xu)^{-\alpha-1} \quad (13)$$

видно, что, кромѣ извѣстныхъ предѣловъ 0 и 1, обусловленныхъ положительностію вещественныхъ частей чиселъ β и $\gamma-\beta$, предѣлами интеграла (5) могутъ быть еще значенія

$$u=\pm\infty,\ u=\frac{1}{x}, \quad (14)$$

если только показатели удовлетворяютъ нѣкоторымъ условіямъ.

Степень функціи (13) относительно перемѣнной u есть $\gamma-\alpha-1$; слѣдовательно, при такихъ показателяхъ α и γ, при которыхъ вещественная часть числа

$$\alpha+1-\gamma$$

положительна, выраженіе (13) обращается въ нуль для значенія

$$u=\pm\infty,$$

и это значеніе можетъ быть предѣломъ интеграла (5).

Чтобъ найти условіе, при которомъ для одного изъ предѣловъ интеграла (5) можно взять

$$u = \frac{1}{x},$$

въ первую часть уравненія (6) вставимъ интегралъ

$$y_0 = \int_a^{\frac{\varepsilon}{x}} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-\alpha}du,$$

гдѣ перемѣнная, по которой слѣдуетъ брать производныя, входитъ въ одинъ изъ предѣловъ интеграла. Тогда получимъ

$$x(1-x)\frac{d^2y_0}{dx^2}+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)x\right]\frac{dy_0}{dx}-\alpha\beta y_0=-(\gamma-\beta-1)$$

$$.\varepsilon^{\beta}(x-\varepsilon)^{\gamma-\beta-1}(1-\varepsilon)^{1-\alpha}x^{1-\gamma}+\alpha a^{\beta}(1-a)^{\gamma-\beta}(1-ax)^{-\alpha-1}.(15).$$

Слѣдовательно, если a есть одна изъ тѣхъ вышеупомянутыхъ величинъ, для которыхъ выраженіе (13) обращается въ нуль, то вторая часть уравненія (15), для $\varepsilon=1$, будетъ нулемъ, если только вещественная часть числа $1-\alpha$ будетъ положительною. Тогда однимъ изъ предѣловъ интеграла (5), удовлетворяющаго уравненію (6), будетъ $\frac{1}{x}$.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что опредѣленный интегралъ (5) удовлетворяетъ уравненію (6), если для предѣловъ его брать величины

$$0,\ 1,\ \pm\infty, \frac{1}{x},$$

при условіи, что вещественныя части соотвѣтствующихъ имъ чиселъ

$$\beta, \gamma-\beta, \alpha+1-\gamma, 1-\alpha$$

положительны.

§ 7. Величины

$$0,\ 1,\ \pm\infty,\ \frac{1}{x}$$

можемъ такъ распредѣлить между предѣлами

$$a_1 \text{ и } b_1,$$

$$a_2 \text{ и } b_2$$

интеграловъ

$$\left.\begin{aligned}&\int_{a_1}^{b_1} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,\\ &\int_{a_2}^{b_2} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

чтобъ числа a_2 и b_2 были оба больше или оба меньше чиселъ a_1 и b_1. Такимъ образомъ получимъ три слѣдующія распредѣленія предѣловъ

	для a_1 и b_1,	для a_2 и b_2,
I	0 и 1,	$\frac{1}{x}$ и $\pm\infty$;
II	0 и $-\infty$,	1 и $\frac{1}{x}$;
III	0 и $\frac{1}{x}$,	1 и $+\infty$.

Изъ этой схемы можемъ заключить, что такъ какъ, при распредѣленіи предѣловъ I, величина $\frac{1}{x}$ лежитъ внѣ предѣловъ отъ 0 до 1, то значенія I для предѣловъ интеграловъ (16) соотвѣтствуютъ случаю, когда отыскивается интегралъ для $x < +1$, и тогда во второмъ интегралѣ слѣдуетъ брать для одного изъ предѣловъ $+\infty$ или $-\infty$, соотвѣтственно положительности или отрицательности x. Распредѣленіе предѣ-

ловъ III относится къ $x > +1$ и къ $x < 0$. Распредѣленіе же предѣловъ II примѣнимо къ $x > 0$, какъ больше такъ и меньше единицы. Слѣдовательно для каждаго вещественнаго значенія x возможны два изъ этихъ распредѣленій.

Вслѣдствіе этого, если въ интегралѣ

$$\int_{a_\lambda}^{b_\lambda} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du, \tag{17}$$

одномъ изъ интеграловъ (16), траекторія интегрированія есть прямая $a_\lambda \ldots b_\lambda$, то на ней не находятся точки a_μ и b_μ, предѣлы другаго изъ интеграловъ (16), которые могутъ быть точками разрыва или развѣтвленія интеграла (17).

Такъ какъ на координатной плоскости перемѣнной x, комплексныя значенія x находятся внѣ прямой, соединяющей какія нибудь два изъ предѣловъ 0, 1 и $\pm\infty$, то опредѣленные интегралы, посредствомъ которыхъ представляемъ общій интегралъ для значеній x, находящихся внѣ оси абсциссъ, могутъ не относится къ значеніямъ x, лежащимъ на оси абсциссъ. Но интегралы, имѣющіе смыслъ для вещественныхъ значеній перемѣнной x, не теряютъ его для ея комплексныхъ значеній. Поэтому слѣдуетъ во всѣхъ случаяхъ, представленныхъ аргументами α, β и γ, вывести два разныя опредѣленные интегралы, относящіеся къ вещественнымъ значеніямъ перемѣнной x. Кромѣ того, такъ какъ интегралы, относящіеся къ отрицательнымъ значеніямъ x, могутъ быть представлены интегралами распредѣленій I и III, т.-е. интегралами относящимися къ $x < +1$ и $x > +1$, то, составивъ два интеграла, относящіеся къ значеніямъ $x < +1$, и два къ значеніямъ $x > +1$, посредствомъ двухъ разныхъ изъ этихъ интеграловъ и не принадлежащихъ къ распредѣленью II можемъ представить общій интегралъ для значеній $x < 0$. Вслѣдствіе сего, остается опредѣлить общій интегралъ для положительныхъ вещественныхъ значеній перемѣнной x, съ тѣмъ условіемъ, чтобъ въ числѣ четырехъ интеграловъ (двумя изъ которыхъ представленъ общій интегралъ для $x < +1$, и двумя

для $x > +1$) находились два разные интеграла, имѣющіе смыслъ для отрицательныхъ значеній перемѣнной x.

§ 8. Шесть интеграловъ (17) суть

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}^a \ldots \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,\\
&\mathrm{I}^b \ldots \int_{\frac{1}{x}}^{(\pm)\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,\\
&\mathrm{II}^a \ldots \int_0^{-\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,\\
&\mathrm{II}^b \ldots \int_1^{\frac{1}{x}} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,\\
&\mathrm{III}^a \ldots \int_0^{\frac{1}{x}} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,\\
&\mathrm{III}^b \ldots \int_1^{+\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du;
\end{aligned} \tag{17'}$$

каждый изъ нихъ теряетъ смыслъ, если не исполнены условія, требуемыя его предѣлами.

Эти интегралы можемъ такъ преобразовать, чтобъ предѣлами каждаго изъ нихъ явились числа 0 и 1.

Въ интегралѣ I^b, имѣющимъ смыслъ при положительнымъ вещественныхъ частяхъ чиселъ

$$\alpha + 1 - \gamma \text{ и } 1 - \alpha,$$

положимъ

$$u = \frac{1}{xv};$$

тогда, для $x > 0$

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,$$

$$= - x^{1-\gamma}\int_0^1 v^{\alpha-\gamma}(v-1)^{-\alpha}(xv-1)^{\gamma-\beta-1}dv,$$

а для $x<0$

$$\int_{\frac{1}{x}}^{-\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du$$

$$= - x^{1-\gamma}\int_0^1 v^{\alpha-\gamma}(v-1)^{-\alpha}(xv-1)^{\gamma-\beta-1}dv.$$

Въ полученномъ интегралѣ

$$I^b \dots \; x^{1-\gamma}\int_0^1 v^{\alpha-\gamma}(1-v)^{-\alpha}(1-xv)^{\gamma-\beta-1}dv \tag{18}$$

подъинтегральная функція составлена изъ степеней такихъ самыхъ множителей, какъ въ интегралѣ I^a; слѣдовательно, этотъ интегралъ представляетъ, послѣ умноженія на нѣкоторую постоянную, сумму ряда

$$I^b \dots \; x^{1-\gamma}F(\beta+1-\gamma,\ \alpha+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x) \tag{18'}$$

и для всѣхъ значеній перемѣнной x, не лежащихъ на прямой проведенной изъ точки 0 въ безконечность, есть функція конечная, сплошная и однозначная.

Интегралы II,

$$II^a \dots \int_0^{-\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,$$

$$II^b \dots \int_1^{\frac{1}{x}} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,$$

имѣющіе смыслъ, первый при положительныхъ вещественныхъ частяхъ чиселъ

$$\beta \text{ и } \alpha + 1 - \gamma,$$

а второй,

$$\gamma - \beta \text{ и } 1 - \alpha,$$

могутъ быть, посредствомъ подстановокъ

$$u = \frac{v-1}{v}, \quad u = \frac{1}{x + (1-x)v},$$

приведены къ интеграламъ

$$\text{II}^a \dots x^{-\alpha} \int_0^1 v^{\alpha-\gamma} (1-v)^{\beta-1} \left(1 - \frac{x-1}{x} v\right)^{-\alpha} dv,$$

(19)

$$\text{II}^b \dots x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \int_0^1 v^{-\alpha} (1-v)^{\gamma-\beta-1} \left(1 - \frac{x-1}{x} v\right)^{\gamma-\alpha} dv.$$

Умноженные на нѣкоторую постоянную, эти интегралы представляютъ сумму рядовъ

$$\text{II}^a \dots x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right),$$

(19')

$$\text{II}^b \dots x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha, \gamma+1-\alpha-\beta, \frac{x-1}{x}\right).$$

Выраженіе

$$1 - \frac{x-1}{x} v$$

обращается въ нуль для значеній

$$x = \frac{v}{v-1};$$

слѣдовательно, такъ какъ значеніямъ v отъ 0 до 1 соотвѣтствуютъ значенія x отъ 0 до $-\infty$, то интегралъ II^a есть конечный, сплошной и однозначный для всѣхъ значеній перемѣнной x, не лежащихъ на прямой $0 \dots -\infty$, интегралъ же II^b — на прямой $+1 \dots -\infty$

Подобнымъ образомъ, интегралы III,

$$\text{III}^a \ldots \int_0^{\frac{1}{x}} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,$$

$$\text{III}^b \ldots \int_1^{\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,$$

имѣющіе смыслъ, первый, при положительныхъ вещественныхъ частяхъ чиселъ

$$\beta \text{ и } 1-\alpha,$$

второй —

$$\gamma-\beta \text{ и } \alpha+1-\gamma,$$

приводятся, помощію подстановокъ

$$u=\frac{v}{x}, \quad u=\frac{1}{v},$$

къ интеграламъ

$$\begin{aligned} &\text{III}^a \ldots x^{-\beta}\int_0^1 v^{\beta-1}(1-v)^{-\alpha}\left(1-\frac{1}{x}v\right)^{\gamma-\beta-1}dv, \\ &\text{III}^b \ldots x^{-\alpha}\int_0^1 v^{\alpha-\gamma}(1-v)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{1}{x}v\right)^{-\alpha}dv, \end{aligned} \tag{20}$$

могутъ быть представлены рядами

$$\begin{aligned} &\text{III}^a \ldots x^{-\beta}F\left(\beta+1-\gamma, \beta, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right), \\ &\text{III}^b \ldots x^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right), \end{aligned} \tag{20'}$$

и остаются конечными, сплошными и однозначными, III^a для всѣхъ значеній перемѣнной x, не лежащихъ на прямой $0 \ldots +\infty$, интегралъ же III^b — для всѣхъ значеній, не лежащихъ на прямой $0 \ldots +1$.

Изъ этого видимъ, что всѣ шесть интеграловъ (17′) суть конечныя, сплошныя и однозначныя функціи перемѣнной x, для всѣхъ точекъ ея координатной плоскости, не лежащихъ на оси абсциссъ.

Примѣнимость этихъ интеграловъ (17′) обусловлена положительностью вещественныхъ частей чиселъ

$$\beta,\ \gamma-\beta,\ \alpha+1-\gamma,\ 1-\alpha.$$

Прежде однакожь, чѣмъ мы приступимъ къ разсмотренію всѣхъ могущихъ здѣсь представиться случаевъ, займемся разложеніемъ этихъ интеграловъ въ такіе ряды, чтобъ они, представляя интегралы разныхъ распредѣленій предѣловъ, для значеній x, взятыхъ въ нѣкоторыхъ предѣлахъ, одновременно сходились. Сравнивая такія разложенія, можно заключить, что интегралы (17′) представляютъ разныя рѣшенія дифференціальнаго уравненія (6).

§ 9. Если къ интегралу

$$y=\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du, \tag{21}$$

примѣнимъ подстановки

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{1-v}{1-vx}\,,\\ u&=\frac{v}{1-x+vx}\,,\\ u&=1-v, \end{aligned}\right\}\tag{22}$$

то предѣлы останутся 0 и 1, интегралъ же приметъ виды

$$\left.\begin{aligned} y&=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^1 v^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{\beta-1}(1-xv)^{\alpha-\gamma}dv,\\ y&=(1-x)^{-\alpha}\int_0^1 v^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{\beta-1}\left(1-\frac{x}{x-1}\,v\right)^{-\alpha}dv,\\ y&=(1-x)^{-\beta}\int_0^1 v^{\beta-1}(1-v)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{x}{x-1}\,v\right)^{\alpha-\gamma}dv. \end{aligned}\right\}\tag{23}$$

Каждый изъ этихъ интеграловъ, умноженный на величину

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

можетъ быть, по формулѣ (2), представленъ гипергеометрическимъ рядомъ. Изъ сравненія этихъ разложеній, получаемъ слѣдующія три Эйлеровы формулы пребразованій гипергеометрическаго ряда

$$\left.\begin{aligned} F(\alpha,\beta,\gamma,x) &= (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x), ^{1)} \\ F(\alpha,\beta,\gamma,x) &= (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{x}{x-1}\right), ^{2)} \\ F(\alpha,\beta,\gamma,x) &= (1-x)^{-\beta} F\left(\beta,\gamma-\alpha,\gamma,\frac{x}{x-1}\right); \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

послѣднее преобразованіе можетъ быть прямо изъ предыдущаго выведено на основаніи свойства

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = F(\beta,\alpha,\gamma,x).$$

Примѣняя подстановки (22) къ интеграламъ (18), (19) и (20), или преобразовывая ряды (18′), (19′) и (20′) по формуламъ (24), получимъ для каждаго изъ интеграловъ (17′) четыре разложенія:

$$\text{I}^a \quad 1\ldots\ F(\alpha,\beta,\gamma,x) \qquad (25)$$

$$2\ldots\ (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x),$$

$$3\ldots\ (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{x}{x-1}\right),$$

$$4\ldots\ (1-x)^{-\beta} F\left(\beta,\gamma-\alpha,\gamma,\frac{x}{x-1}\right);$$

---

[1]) *Specimen transformationis singularis serierum.* p. 62.

[2]) Ср. Куммеръ въ журналѣ Крелля, XV томъ, стр. 35 и 54.

I^b 1... $x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$,

2... $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x)$,

3... $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}F\left(\alpha+1-\gamma, 1-\beta, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right)$,

4... $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}F\left(\beta+1-\gamma, 1-\alpha, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right)$;

II^a 1... $x^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right)$,

2... $x^{-\beta}F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right)$,

3... $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)$.

4... $x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)$;

II^b 1... $x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha, \gamma+1-\alpha-\beta, \frac{x-1}{x}\right)$,

2... $x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\gamma-\beta, 1-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, \frac{x-1}{x}\right)$,

3... $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x)$,

4... $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha, 1-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x)$;

III^a 1... $x^{-\beta}F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right)$,

2... $x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\alpha, \gamma-\alpha, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right)$,

3... $(1-x)^{-\beta}F\left(\beta, \gamma-\beta, \beta+1-\alpha, \frac{1}{1-x}\right)$,

4... $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}F\left(\beta+1-\gamma, 1-\alpha, \beta+1-\alpha, \frac{1}{1-x}\right)$;

$$\mathrm{III}^b\ 1 \ldots x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right).$$

$$2 \ldots x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\beta, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right),$$

$$3 \ldots (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{1-x}\right),$$

$$4 \ldots x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha+1-\gamma, 1-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{1-x}\right)^{1)}.$$

Эти 24 ряда, удовлетворяющіе дифференціальному уравненію

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\gamma-(\alpha+\beta+1)x\right]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0, \qquad (6)$$

выведены были въ первый разъ Куммеромъ.

Изъ этихъ рядовъ видимъ, что всегда какіе нибудь два изъ интеграловъ (17′) могутъ быть представлены посредствомъ такихъ рядовъ, которые одновременно сходятся для значеній перемѣнной x, соотвѣтствующихъ точкамъ нѣкоторой части плоскости перемѣнной x [2]). Въ такихъ рядахъ коеффиціенты при различныхъ степеняхъ перемѣнной x не могутъ быть выведены изъ коеффиціентовъ при тѣхъ же самыхъ степеняхъ x въ другомъ ряду чрезъ умноженіе на туже самую величину; слѣдовательно, умножая одинъ изъ шести интеграловъ (17′) на какую нибудь постоянную, нельзя получить другой, и эти интегралы (17′) слѣдуетъ считать

---

[1]) Въ мемуарѣ Якоби не исправлена опечатка: въ интегралахъ 4) классовъ III и IV должно быть $\frac{1}{1-x}$ вмѣсто $\frac{1}{x}$ (Crelle, pag. 153; Werke, pag. 101).

[2]) Слѣдуетъ еще замѣтить, что для какого нибудь значенія перемѣнной x, 12 изъ рядовъ (25) сходятся, 12-же расходятся, и что нѣтъ ни одного значенія перемѣнной x, при которомъ-бы сходились три изъ рядовъ (25), изъ которыхъ каждый представлялъ-бы интегралъ, принадлежащій другому распредѣленію предѣловъ.

разными интегралами дифференціальнаго уравненія (6). Поэтому, если аргументы α, β и γ удовлетворяютъ условіямъ, необходимымъ для того, чтобъ два изъ этихъ шести интеграловъ, A и B, имѣли смыслъ, то при тѣхъ значеніяхъ перемѣнной x, для которыхъ они остаются конечными, сплошными и однозначными, общій интегралъ уравненія (6) будетъ

$$C_1 A_1 + C_2 A_2, \tag{26}$$

гдѣ C_1 и C_2 суть постоянныя интегрированія.

§ 10. Условія, при которыхъ эти интегралы имѣютъ смыслъ, зависятъ отъ положительности вещественныхъ частей чиселъ

$$\beta,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ \gamma-\alpha;$$

вещественныя части чиселъ α, β и γ обозначимъ α_0, β_0 и γ_0.

Такъ какъ первая часть уравненія (6) есть симметрическая функція относительно аргументовъ α и β, то тотъ изъ этихъ аргументовъ, вещественная часть котораго больше, можемъ назвать β, такъ что въ этомъ § и въ § 12 принимаемъ что α_0 не больше β_0. Такимъ образомъ, мы приведемъ число всѣхъ возможныхъ случаевъ къ слѣдующимъ девяти.

1°. $\beta_0>0, \gamma_0-\beta_0>0, \alpha_0>0, \gamma_0-\alpha_0>0.$

Изъ первыхъ двухъ неравенствъ слѣдуетъ, что исполнены условія для предѣловъ 0 и 1. Условія же для остальныхъ предѣловъ, т. е.

$$\alpha_0+1-\gamma_0>0 \text{ и } 1-\alpha_0>0 \tag{27}$$

будутъ соблюдены въ этомъ случаѣ только для значеній $-1<\alpha_0<+1$, а слѣдовательно и $0<\beta_0<\gamma_0<1+\alpha_0<2$. Слѣдовательно условія (27) не выполнены для всѣхъ возможныхъ въ разбираемомъ случаѣ значеній аргументовъ α, β и γ, такъ что

вообще возможны только предѣлы 0 и 1. Вслѣдствіе же того, что въ настоящемъ случаѣ можно взять интегралъ

$$\int_{a\lambda}^{b_\lambda} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du \qquad (17)$$

только въ предѣлахъ 0 и 1, то изъ шести интеграловъ (17′) можетъ быть примѣненъ только интегралъ I^a, не относящійся къ значеніямъ $x>1$.

$2^0. \beta_0>0, \gamma_0-\beta_0>0, \alpha_0<0, \gamma_0-\alpha_0>0.$

Здѣсь кромѣ условій для предѣловъ 0 и 1 исполнено и условіе для предѣла $\frac{1}{x}$,

$$1-\alpha_0>0,$$

для всѣхъ въ этомъ случаѣ возможныхъ значеній аргументовъ α, β и γ. Соблюденія четвертаго условія,

$$\alpha_0+1-\gamma_0>0$$

требовало-бы опять ограниченія значеній этихъ аргументовъ: $0>\alpha_0>-1, 0<\beta_0<\gamma_0<1+\alpha_0<1$. Придавая предѣламъ интеграла (17) значенія 0, 1, $\frac{1}{x}$ можно изъ интеграловъ

$$I^a \text{ и } II^b$$

составить общій интегралъ дифференціальнаго уравненія (6), не относящійся къ значеніямъ $x>1$, а изъ интеграловъ

$$II^b \text{ и } III^a$$

—не относящійся къ значеніямъ $x<1$.

$3^0. \beta_0>0, \gamma_0-\beta_0<0, \alpha_0>0, \gamma_0-\alpha_0>0.$

Если въ этомъ случаѣ, вмѣсто того, чтобъ опредѣлять предѣлы для интеграла (17), будемъ искать предѣлы для интеграла

$$\int_{\alpha_\lambda}^{b_\lambda} u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-\alpha-1}(1-xu)^{-\beta}du,$$

то третье, четвертое и второе изъ предположенныхъ неравенствъ показываютъ, что исполнены условія для предѣловъ 0, 1 и $\pm\infty$ этого интеграла. Положительность вещественной части аргумента β, данная первымъ неравенствомъ, не дозволяетъ, для всѣхъ возможныхъ въ этомъ случаѣ значеній аргументовъ α, β и γ, взять для одного предѣла величину $\frac{1}{x}$. Такимъ образомъ, чтобъ составить общій интегралъ, слѣдуетъ взять изъ интеграловъ (17′) для $x<1$ интегралы

$$\overset{a}{\underset{(\alpha)}{\mathrm{I}}} \text{ и } \overset{a}{\underset{(\alpha)}{\mathrm{II}}}.$$

для $x>1$ интегралы

$$\overset{a}{\underset{(\alpha)}{\mathrm{II}}} \text{ и } \overset{b}{\underset{(\alpha)}{\mathrm{III}}},$$

гдѣ индексъ (α) обозначаетъ, что въ интегралахъ (17′) аргументы α и β перемѣщены.

Помощію подобнаго рода соображеній и для остальныхъ шести случаевъ, приходимъ къ результатамъ, которые для всѣхъ девяти могутъ быть сопоставлены такъ:

	β_0	$\gamma_0 - \beta_0$	α_0	$\gamma_0 - \alpha_0$	$x < 1$	$x > 1$
1	+	+	+	+	$\overset{a}{\mathrm{I}}$	
2	+	+	—	+	$\overset{a}{\mathrm{I}}$ и $\overset{b}{\mathrm{II}}$	$\overset{b}{\mathrm{II}}$ и $\overset{a}{\mathrm{III}}$
3	+	—	+	+	$\overset{a}{\underset{(\alpha)}{\mathrm{I}}}$ и $\overset{a}{\underset{(\alpha)}{\mathrm{II}}}$	$\overset{a}{\underset{(\alpha)}{\mathrm{II}}}$ и $\overset{b}{\underset{(\alpha)}{\mathrm{III}}}$
4	+	—	+	—	$\overset{a}{\mathrm{II}}$	$\overset{a}{\mathrm{II}}$
5	+	—	—	+		$\overset{a}{\mathrm{III}}$
6	+	—	—	—	$\overset{b}{\mathrm{I}}$ и $\overset{a}{\mathrm{II}}$	$\overset{a}{\mathrm{II}}$ и $\overset{a}{\mathrm{III}}$
7	—	+	—	+	$\overset{b}{\mathrm{II}}$	$\overset{b}{\mathrm{II}}$
8	—	—	—	+	$\overset{b}{\underset{(\alpha)}{\mathrm{I}}}$ и $\overset{b}{\underset{(\alpha)}{\mathrm{II}}}$	$\overset{b}{\underset{(\alpha)}{\mathrm{II}}}$ и $\overset{b}{\underset{(a)}{\mathrm{III}}}$
9	—	—	—	—	$\overset{b}{\mathrm{I}}$	

Изъ этой таблицы видно, что въ случаяхъ 1, 4, 5, 7 и 9 или не получается ни одного изъ интеграловъ (17′), или же получаются они въ числѣ, недостаточномъ для того, чтобъ помощію ихъ можно было, для всѣхъ значеній перемѣнной x, составить общій интегралъ, вида (26), дифференціальнаго уравненія (6). Недостающіе интегралы возможно будетъ вывести на основаніи замѣченной Якоби связи между интегра-

лами двухъ подобныхъ (6)-ому дифференціальныхъ уравненій, которая представлена слѣдующею теоремою.

§ 11. Теорема I. Если

$$y = f(x)$$

есть интегралъ дифференціальнаго уравненія

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\gamma - (\alpha+\beta+1)\,x\right]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0, \qquad (6)$$

то

$$z = \int_a^b \frac{t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha+\beta-\gamma}}{(t-x)^{\varsigma}} f(t)dt \qquad (28)$$

будетъ интеграломъ дифференціальнаго уравненія

$$x(1-x)\frac{d^2z}{dx^2} + \left[\varsigma+1-\gamma-(2\varsigma+1-\alpha-\beta)x\right]\frac{dz}{dx}$$

$$-(\varsigma-\alpha)(\varsigma-\beta)z = 0, \qquad (29)$$

если a и b имѣютъ значенія 0, 1, или $\pm\infty$ и если

$$\left[\frac{t^{\gamma}(1-t)^{\alpha+\beta+1-\gamma}}{(t-x)^{\varsigma}}\left(f'(t)+\varsigma\frac{f(t)}{t-x}\right)\right]_a^b = 0. \qquad (30)$$

Если вещественная часть числа $1-\varsigma$ положительна, то для одного предѣла интеграла (28) можно принять $b=x$, предполагая, что для другаго предѣла a условіе (30) выполнено.

Умноживъ дифференціальное уравненіе (6) на

$$x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma},$$

можемъ его представить въ такомъ видѣ

$$\alpha\beta\, t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha+\beta-\gamma}f(t) = \frac{d}{dt}\cdot\left[t^{\gamma}(1-t)^{\alpha+\beta+1-\gamma}f'(t)\right],^{*)}$$

---

*) Если $f(x)=F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, то на основаніи формулы (5) § 2 рядъ

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{\gamma}\frac{d}{dx}\cdot x^{\gamma}(1-x)^{\alpha+\beta+1-\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x).$$

а слѣдовательно интегралъ (28) можно представить такъ

$$\alpha\beta z = \int_a^b \frac{d}{dt} \left[t^{\gamma} (1-t)^{\alpha+\beta+1-\gamma} f'(t) \right] \cdot \frac{dt}{(t-x)^{\varsigma}}.$$

Интегрируя дважды по частямъ, получаемъ

$$\alpha\beta z = \left[\frac{t^{\gamma}(1-t)^{\alpha+\beta+1-\gamma}}{(t-x)^{\varsigma}} \left(f'(t) + \varsigma \frac{f(t)}{t-x} \right) \right]_a^b$$

$$-\varsigma \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{t^{\gamma}(1-t)^{\alpha+\beta+1-\gamma}}{(t-x)^{\varsigma+1}} \right) . f(t) dt. \qquad (31)$$

Полагая

$$t = \frac{1}{u},$$

можемъ въ послѣднемъ интегралѣ выраженіе

$$-\varsigma \frac{t^{\gamma}(1-t)^{\alpha+\beta+1-\gamma}}{(t-x)^{\varsigma+1}} \qquad (32)$$

представить въ видѣ

$$-\varsigma \frac{t^{\varsigma-\alpha-\beta}(1-u)^{\alpha+\beta+1-\gamma}}{(1-xu)^{\varsigma+1}}, \qquad (33)$$

которое переходитъ въ выраженіе (9) при

$$\varsigma = \alpha', \varsigma-\alpha-\beta = \beta', \varsigma-\gamma+1 = \gamma'. \qquad (34)$$

Вставляя значенія (34) въ уравненіе (10), а затѣмъ умножая его на $f\left(\frac{1}{u}\right) = f(t)$ и интегрируя, получимъ

$$x(1-x)\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\varsigma+1-\gamma-(2\varsigma+1-\alpha-\beta)x\right)\frac{dz}{dx} - \varsigma(\varsigma-\alpha-\beta) z$$

$$= -\varsigma \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{t^{\gamma}(1-t)^{\alpha+\beta+1-\gamma}}{(t-x)^{\varsigma+1}} \right) . f(t)\, dt.$$

Вставивъ въ уравненіе (31) значеніе интеграла, получаемое изъ послѣдняго уравненія, видимъ, что, если условіе (30) выполнено, дифференціальному уравненію (29) будетъ удовлетворять интегралъ (28), что и слѣдовало доказать.

Предположивъ въ интегралѣ (28)

$$b=\varepsilon x,$$

и подставляя этотъ интегралъ въ уравненіе (29) вмѣсто z, подобно тому, какъ въ § 6, получимъ во второй части уравненія, подобнаго (15), кромѣ членовъ, зависящихъ отъ другаго предѣла a, еще функцію, имѣющую множителемъ

$$(1-\varepsilon)^{1-\varsigma},$$

который для $\varepsilon=1$ обратится въ нуль, если вещественная часть числа $1-\varsigma$ положительна.

Если

$$f(t)=F(\alpha,\beta,\gamma,t)$$

и выраженіе (32) при $t=0$ обращается въ нуль, что обусловлено положительностью вещественной части числа γ, то для этого предѣла условіе (30) выполнено, такъ какъ функціи $F(\alpha,\beta,\gamma,0)$ и $\left(\frac{d}{dt}.F(\alpha,\beta,\gamma,t)\right)_{t=0}$ суть конечныя величины.

Слѣдствіе. Если

$$z=f(x)$$

будетъ интеграломъ дифференціальнаго уравненія

$$x(1-x)\frac{d^2z}{dx^2}+\left[\varsigma+1-\gamma-(2\varsigma-\alpha-\beta+1)x\right]\frac{dz}{dx}$$

$$-(\varsigma-\alpha)(\varsigma-\beta)z=0, \qquad (29)$$

и если

$$\left[\frac{t^{\varsigma+1-\gamma}(1-t)^{\varsigma-\alpha-\beta+\gamma}}{(t-x)^{\varsigma}}\left(f'(t)-\varsigma\frac{f(t)}{t-x}\right)\right]_a^b=0, \tag{35}$$

то

$$y=\int_a^b \frac{t^{\varsigma-\gamma}(1-t)^{\varsigma+\gamma-\alpha-\beta-1}}{(t-x)^{\varsigma}}f(t)dt \tag{36}$$

будетъ представлять интегралъ дифференціальнаго уравненія

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)x\right]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0. \tag{6}$$

Теорема II. Если интегралъ дифференціальнаго уравненія (29) есть конечный рядъ, а слѣдовательно, если одинъ изъ аргументовъ $\varsigma-\alpha$ или $\varsigma-\beta$ ряда

$$F(\varsigma-\alpha,\varsigma-\beta,\varsigma+1-\gamma,x),$$

напр.

$$\varsigma-\alpha=-n,$$

гдѣ n цѣлое число, так что

$$z=f(x)=F(-n,\alpha-n-\beta,\alpha+1-n-\gamma,x), \tag{37}$$

то интегралъ дифференціальняго уравненія (6) можетъ быть представленъ интеграломъ

$$\int_a^b \frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\right].(t-x)^{n-\alpha}dt, \tag{38}$$

въ которомъ предѣлами a и b могутъ быть величины

$$0,\ 1,\ \pm\infty,\ x,$$

обусловлены только положительностью вещественныхъ частей чиселъ

$$\alpha+1-\gamma-n,\gamma-\beta-n,\beta,n+1-\alpha.$$

Чтобъ это доказать, представимъ рядъ (37) въ видѣ n-той производной. Изъ дифференціальнаго уравненія (6) получаемъ

$$x(1-x)\frac{d^3y}{dx^3}+\left[\gamma+1-(\alpha+\beta+3)x\right]\frac{d^2y}{dx^2}=(\alpha+1)(\beta+1)\frac{dy}{dx},$$

а затѣмъ

$$x(1-x)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}+\left[\gamma+n-1-(\alpha+\beta+2n-1)x\right]\frac{d^ny}{dx^n}$$

$$=(\alpha+n-1)(\beta+n-1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.$$

Умноживъ это уравненіе на

$$x^{\gamma+n-2}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+n-1},$$

представимъ его такъ

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+\beta+n-\gamma}\frac{d^ny}{dx^n}\right]$$

$$=(\alpha+n-1)(\beta+n-1)x^{\gamma+n-2}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

откуда

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+\beta+n-\gamma}\frac{d^ny}{dx^n}\right]=(\alpha+n-1)(\beta+n-1)$$

$$\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[x^{\gamma+n-2}(1-x)^{\alpha+\beta+n-\gamma-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right].$$

Придавая n значенія

$$n,\ n-1,\ \ldots,\ 2,\ 1,$$

изъ послѣдняго уравненія получаемъ n такихъ уравненій, помощію которыхъ выводимъ

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+\beta+n-\gamma}\frac{d^ny}{dx^n}\right]$$

$$=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}y.$$

откуда, при

$$y=F(\alpha,\beta,\gamma,x),$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}}{\alpha\ldots(\alpha+n-1)\beta\ldots(\beta+n-1)}$$

$$\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+\beta-n-\gamma}\frac{d^n}{dx^n}F(\alpha,\beta,\gamma,x)\right].$$

Если

$$\alpha=-n,$$

то

$$\frac{d^n}{dx^n}F(-n,\beta,\gamma,x)=(-1)^n\frac{1.2\ldots n\beta\ldots(\beta+n-1)}{\gamma\ldots(\gamma+n-1)}; \quad (39)$$

вставивъ это въ предыдущую формулу, получаемъ

$$F(-n,\beta,\gamma,x)=\frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma+n-\beta}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\frac{d^n}{dx^n}x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\beta-\gamma}. \quad (39a)$$

По этой формулѣ, рядъ (37) можетъ быть представленъ такъ

$$f(x)=\frac{x^{n+\gamma-\alpha}(1-x)^{n+\beta+1-\gamma}}{(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha+1-n-\gamma)}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}\right];$$

вставивъ это въ интегралъ (36), получаемъ требуемое

$$\int_a^b\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\right]\cdot(t-x)^{n-\alpha}dt.$$

Однимъ изъ предѣловъ интеграла можетъ быть $b=x$, при условіи

$$1-\varsigma_0=1-\alpha_0+n>0;$$

что же касается условія (35) для предѣловъ 0, 1 и $\pm\infty$, то оно въ разбираемомъ случаѣ есть

$$\left[\frac{t^{\alpha+1-\gamma-n}(1-t)^{\gamma-\beta-n}}{(t-x)^{\alpha-n}}\left(f'(t)-(\alpha-n)\frac{f(t)}{t-x}\right)\right]_{t=a}^{t=b}=0.$$

Но такъ какъ $f(t)$ есть цѣлая функція n-ой степени, то для предѣловъ 0 и 1 послѣднее условіе выполнено, если только

$$\alpha_0+1-\gamma_0-n>0 \text{ и } \gamma_0-\beta_0-n>0;$$

что же касается предѣла $a=\pm\infty$, то слѣдуетъ замѣтить, что первая часть послѣдняго равенства есть функція отъ t степени—β, такъ, что въ случаѣ

$$\beta_0>0,$$

однимъ изъ предѣловъ интеграла (38) можетъ быть $\pm\infty$.

Слѣдствіе I. Если по этой теоремѣ составимъ интегралъ дифференціальнаго уравненія, получаемаго изъ уравненія (6) чрезъ замѣненіе аргументовъ α, β и γ тремя первыми аргументами гипергеометрическаго ряда котораго нибудь изъ интеграловъ (25) дифференціальнаго уравненія (6), то полученный интегралъ, послѣ умноженія на произведеніе множителей x и $1-x$ въ надлежащихъ степеняхъ, будетъ интреграломъ дифференціальнаго уравненія (6).

Напр. гипергеометрическій рядъ $F\left(\beta,\gamma-\alpha,\beta+1-\alpha,\ \frac{1}{1-x}\right)$ интеграла III^a 3,

$$(1-x)^{-\beta}F\left(\beta,\gamma-\alpha,\beta+1-\alpha,\ \frac{1}{1-x}\right),$$

удовлетворяетъ дифференціальному уравненію (40)

$$x'(1-x')\frac{dy^2}{dx'^2}+\left(\beta+1-\alpha-(\gamma-\alpha+\beta+1)x'\right)\frac{dy}{dx'}-(\gamma-\alpha)\beta y=0,$$

при

$$x'=\frac{1}{1-x}.$$

Слѣдовательно, на основаніи предыдущаго слѣдствія, уравненію (40) удовлетворитъ интегралъ

$$\int_a^b \frac{d^n}{dt^n}[t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{-\alpha}].(t-x')^{\alpha+n-\gamma}dt,$$

а выраженіе

$$(1-x)^{-\beta}\int_a^b \frac{d^n}{dt^n}[t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{-\alpha}].\left(t-\frac{1}{1-x}\right)^{\alpha+n-1}dt \quad (41)$$

будетъ интеграломъ уравненія (6). Предѣлы a и b могутъ имѣть значенія

$$0, 1, \pm\infty, \frac{1}{1-x},$$

при условіяхъ

$$\alpha_0-n>0, \beta_0+1-\gamma_0-n>0, \gamma_0-\alpha_0>0, \alpha_0+n-\gamma_0+1>0.$$

Такимъ же образомъ, основываясь на гипергеометрическомъ рядѣ интеграла $\mathrm{II}^a 1$, находимъ, что выраженіе

$$x^{-\alpha}\int_a^b \frac{d^n}{dt^n}[t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{\beta-1}].\left(t-\frac{x-1}{x}\right)^{n-\alpha}dt \quad (42)$$

представляетъ тоже интегралъ дифференціальнаго уравненія (6), и т. д.

Слѣдствіе II. Если

$$y=f(x)$$

есть одинъ интегралъ дифференціальнаго уравненія

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0 \quad (6)$$

и если, при значеніяхъ 0, 1, и $\pm\infty$ для предѣловъ a и b,

$$\left[\frac{t^{\gamma}(1-t)^{\alpha+\beta+1-\gamma}}{t-x}\left(f'(t)+\frac{f(t)}{t-x}\right)\right]_a^b=0, \quad (43)$$

то

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_a^b \frac{t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha+\beta-\gamma}}{t-x} f(t)\,dt \qquad (44)$$

будетъ другимъ интеграломъ этого дифференціальнаго уравненія.

Полагая въ уравненіи (29) и его интегралѣ (28)

$$\varsigma-\alpha=\alpha',$$
$$\varsigma-\beta=\beta',$$
$$\varsigma+1-\gamma=\gamma',$$

приводимъ уравненіе (29) къ уравненію

$$x(1-x)\frac{d^2z}{dx^2}+[\gamma'-(\alpha'+\beta'+1)x]\frac{dz}{dx}-\alpha'\beta'z=0. \qquad (29')$$

Въ интегралѣ I^b2 этого уравненія,

$$x^{1-\gamma'}(1-x)^{\gamma'-\alpha'-\beta'}F(1-\alpha',1-\beta',2-\gamma',x),$$

рядъ $F(1-\alpha',1-\beta',2-\gamma',x)$ будетъ удовлетворять уравненію

$$x(1-x)\frac{d^2z'}{dx^2}+[2-\gamma'-(3-\alpha'-\beta')x]\frac{dz'}{dx}$$
$$-(1-\alpha')(1-\beta')z'=0, \qquad (45)$$

т. е. уравненію

$$x(1-x)\frac{d^2z'}{dx^2}+[1-\varsigma-\gamma-(3-2\varsigma+\alpha+\beta)x]\frac{dz'}{dx}$$
$$-(1-\varsigma+\alpha)(1-\varsigma+\beta)z'=0. \qquad (45')$$

Обозначивъ

$$1-\varsigma+\alpha=\alpha'',$$
$$1-\varsigma+\beta=\beta'',$$
$$1-\varsigma+\gamma=\gamma'',$$

видимъ, что интегралъ (28) дифференціальнаго уравнинія (29), умноженный на

$$x^{1-\gamma''}(1-x)^{\gamma''-\alpha''-\beta''}=x^{\varsigma-\gamma}(1-x)^{\varsigma-\gamma-\alpha-\beta-1},$$

представитъ интегралъ дифференціальнаго уравненія (45′). Полагая наконецъ $\varsigma=1$, уравненіе (45′) приведемъ къ уравненію (6), однимъ интеграломъ котораго есть $f(x)$, а другимъ произведеніе интеграла

$$\int_a^b \frac{t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha+\beta-\gamma}}{t-x} f(t)dt$$

на множителя

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta},$$

что и есть выраженіе (44).

§ 12. На основаніи теоремы II и ея перваго слѣдствія, можемъ пополнить таблицу § 10.

Тамъ мы видѣли, что *въ 1-омъ случаѣ* недостаетъ одного интеграла при $x<1$, и обоихъ при $x>1$. Ечли $x<1$, то другой интегралъ можетъ быть представленъ интеграломъ (41)

$$(1-x)^{-\beta}\int_a^b \frac{d^n}{dt^n}\cdot\left[t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{-\alpha}\right]\cdot\left(t-\frac{1}{1-x}\right)^{\alpha+n-\gamma}dt.$$

Что касается предѣловъ, то, такъ какъ $\gamma_0-\alpha_0>0$, однимъ изъ предѣловъ можемъ принять ∞. Принимая же n достаточно большимъ, чтобъ

$$1-(\gamma_0-\alpha_0-n)>0,$$

мы можемъ для другаго предѣла принять $\frac{1}{1-x}$. Слѣдовательно, другимъ интеграломъ для $x<1$ будетъ

$$(1-x)^{-\beta}\int_{\frac{1}{1-x}}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n}\cdot\left[t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{-\alpha}\right]\cdot\left(t-\frac{1}{1-x}\right)^{\alpha+n-\gamma}dt,$$

предполагая $1-\alpha_0-\gamma_0+>0$. Подставляя въ этомъ интегралѣ

$$t=\frac{1}{1-x}v,$$

приводимъ его къ интегралу

$$\int_1^\infty \frac{d^n}{dv^n}\cdot\left[v^{\gamma-\beta-1}(1-x-v)^{-\alpha}\right].\ (1-v)^{\alpha+n-\gamma}dv.$$

Такъ какъ въ разбираемомъ случаѣ вещественная часть числа α положительна, то этотъ интегралъ есть функція конечная, сплошная и однозначная во всѣхъ точкахъ координатной плоскости перемѣнной x, не лежащихъ на прямой $0 \ldots -\infty$.

Для $x>1$, можно оба недостающіе интегралы вывести изъ интеграла (38), принимая предѣлами ∞ и x:

$$\int_x^\infty \frac{d^{n_1}}{dt^{n_1}}\cdot\left[t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\right].\ (t-x)^{n_1-\alpha}dt,$$

$$\int_x^\infty \frac{d^{n_2}}{dt^{n_2}}\left[t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\right].\ (t-x)^{n_2-\beta}dt,$$

потому, что въ этомъ случаѣ $\beta_0>0$ и $\alpha_0>0$, а n_1 и n_2 можно придавать значенія цѣлыхъ чиселъ, достаточно большихъ, чтобъ

$$1-\alpha_0+n_1>0,\ \ 1-\beta_0+n_2>0.$$

Поставивъ въ этихъ интегралахъ

$$t=x-(x-1)v,$$

приводимъ ихъ къ интеграламъ

$$(1-x)^{-\beta}\int_0^{-\infty}\frac{d^{n_1}}{dv^{n_1}}.\left[\left(v-\frac{x}{x-1}\right)^{\alpha-\gamma}(1-v)^{\gamma-\beta-1}\right].v^{n_1-\alpha}dv,$$

$$(1-x)^{-\alpha}\int_0^{-\infty}\frac{d^{n_2}}{dv^{n_2}}.\left[\left(v-\frac{x}{x-1}\right)^{\beta-\gamma}(1-v)^{\gamma-\alpha-1}\right].v^{n_2-\beta}dv,$$

которыя остаются конечными, сплошными и однозначными для всѣхъ точекъ плоскости перемѣнной x, не лежащихъ на прямой $0 \ldots + \infty$.

Въ 4-омъ случаѣ, при $x<1$, для другаго интеграла, помощію интеграла $\mathrm{III}^{a}1$, найдемъ приведенное выше, (42), выраженіе

$$x^{-\alpha}\int_{\frac{x-1}{x}}^{-\infty}\frac{d^n}{dt^n}\cdot\left[t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{\beta-1}\right].\left(t-\frac{x-1}{x}\right)^{n-\alpha}dt,$$

при $n>\alpha_0-1$; что касается условія для предѣла ∞,

$$1+\alpha_0-\gamma_0>0,$$

то оно соблюдено, такъ какъ въ настоящемъ случаѣ предположено $\gamma_0-\alpha_0<0$. Этотъ интегралъ подстановкою

$$t=\frac{x-1+v}{x}$$

можетъ быть приведенъ къ интегралу

$$x^{1-\gamma}\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{dv^n}\cdot\left[(v-1+x)^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{\beta-1}\right].\ v^{n-\alpha}dv,$$

остающемуся конечнымъ, сплошнымъ и однозначнымъ во всѣхъ точкахъ плоскости перемѣнной x, не лежащихъ на прямой $0 \ldots + \infty$.

Для $x>1$, изъ интеграла (38) получаемъ

$$\int_x^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}\cdot\left[t^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}\right].\ (t-x)^{n-\beta}dt,$$

при $n>\beta_0-1$. Въ этомъ интегралѣ число $\gamma_0-\alpha_0$ отрицательно; примѣняя къ нему подстановку

$$t=vx,$$

приведемъ его къ интегралу

$$x^{-\alpha}\int_1^{\infty}\frac{d^n}{dv^n}\cdot\left[v^{\beta-\gamma}(1-vx)^{\gamma-\alpha-1}\right].\ (1-v)^{n-\beta}dv,$$

который остается конечнымъ, сплошнымъ и однозначнымъ для всѣхъ точекъ координатной плоскости перемѣнной x, не лежащихъ на прямой $0...+\infty$.

Въ 5-омъ случаѣ, для $x<1$, помощію интеграловъ I^a4 и III^a1 можемъ вывести интегралы

$$(1-x)^{-\beta}\int_{\frac{x}{x-1}}^{-\infty}\frac{d^n}{dt^n}\cdot\left[t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\alpha-1}\right].\left(t-\frac{x}{x-1}\right)^{n-\beta}dt, \qquad (46)$$

при $n>\beta_0-1$, и

$$x^{-\beta}\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}\cdot\left[t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{-\alpha}\right].\left(t-\frac{1}{x}\right)^{\gamma+n-\beta-1}dt,$$

при $n>-(\gamma_0-\beta_0)$. Эти интегралы, первый посредствомъ подстановки

$$t=\frac{x}{x-1}(1-v),$$

а второй —

$$t=\frac{1+(x-1)v}{x},$$

приводятся къ интеграламъ

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$$

$$\cdot\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{dv^n}\left[(1-v)^{\beta-\gamma}(1-xv)^{\alpha-1}\right].v^{n-\beta}dv, \qquad (46')$$

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$$

$$\cdot\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{dv^n}\left[(1-(1-x)v)^{\alpha-\gamma}(1-v)^{-\alpha}\right]\cdot v^{\gamma+n-\beta-1}dv,$$

изъ которыхъ первый остается конечнымъ, сплошнымъ и однозначнымъ для всѣхъ точекъ плоскости перемѣнной x,

не лежащихъ на прямой $+1 \ldots -\infty$, второй же—для точекъ, не лежащихъ на прямой $0 \ldots +\infty$.

Для $x>1$, другой интегралъ можемъ представить интеграломъ (46), только въ немъ, вмѣсто предѣла $-\infty$, примемъ $+\infty$; посредствомъ той же самой подстановки

$$t=\frac{x}{x-1}(1-v),$$

приведемъ его къ интегралу (46').

Въ 7-омъ случаѣ, для $x<1$, изъ интеграла II^b 1 получаемъ

$$x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$$

$$\cdot\int_{\frac{x-1}{x}}^{-\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\beta-\gamma}(1-t)^{-\beta}\right]\cdot\left(t-\frac{x-1}{x}\right)^{n+\alpha-1}dt,$$

при $n>-\alpha_0$; при помощи подстановки

$$t=\frac{x-1+v}{x},$$

можемъ этотъ интегралъ привести къ интегралу

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{dv^n}\left[(v-1+x)^{\beta-\gamma}(1-\gamma)^{-\beta}\right]\cdot v^{n+\alpha-1}dv,$$

который будетъ функціей конечной, сплошной и однозначной для всѣхъ точекъ плоскости перемѣнной x, не лежащихъ на прямой $+1 \ldots +\infty$.

Для $x>1$, посредствомъ интеграла I^b 2 выводимъ

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_x^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}\cdot\left[t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{\alpha-\gamma}\right]\cdot(t-x)^{n+\beta-1}dt,$$

при $n>-\beta_0$; подставивъ здѣсь

$$t=x(1-v),$$

приходимъ къ интегралу

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$$

$$\cdot\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{dv^n}\left[(1-v)^{\gamma-\beta-1}\Big(1-x(1-v)\Big)^{\alpha-\gamma}\right].\, v^{n+\beta-1}dv,$$

который остается конечнымъ, сплошнымъ и однозначнымъ для всѣхъ точекъ плоскости перемѣнной x, не лежащихъ на прямой $0...+\infty$.

Наконецъ, *въ 9-омъ случаѣ*, для $x<1$, помощію интеграла $Ш^a4$ получимъ

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}$$

$$\cdot\int_{\frac{1}{1-x}}^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{-\beta}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\right].\left((t-\frac{1}{1-x}\right)^{n+\alpha-1}dt,$$

при $n>-\alpha_0$; этотъ интегралъ подстановкою

$$t=\frac{1-v}{1-x}$$

приводится къ интегралу

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\beta-\alpha}\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{dv^n}\left[(1-v)^{-\beta}(v-x)^{\gamma-\alpha-1}\right].v^{n+\alpha-1}dv,$$

который представляетъ функцію конечную, сплошную и однозначную для всѣхъ точекъ плоскости перемѣнной x, не лежащихъ на прямой $+1...-\infty$.

Для $x>1$, изъ интеграловъ I^b1 и $I^b_{(a)}1$ получимъ

$$x^{1-\gamma}\int_x^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\alpha-1}(1-t)^{-\beta}\right].(t-x)^{\gamma+n-\alpha-1}dt,$$

при $n>-(\gamma_0-\alpha_0)$, и

$$x^{1-\gamma}\int_x^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\beta-1}(1-t)^{-\alpha}\right].(t-x)^{\gamma+n-\beta-1}dt,$$

при $n>-(\gamma_0-\alpha_0)$, которые посредствомъ подстановки

$$t=x+(1-x)v,$$

приводятся къ интеграламъ

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$$

$$\cdot\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[\left(x+(1-x)v\right)^{\alpha-1}(1-v)^{-\beta}\right].v^{\gamma+n-\alpha-1}dv,$$

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$$

$$\cdot\int_0^{-\infty}\frac{d^n}{dt^n}\left[\left(x+(1-x)v\right)^{\beta-1}(1-v)^{-\alpha}\right].v^{\gamma+n-\beta-1}dv,$$

остающимся конечными, сплошными и однозначными для всѣхъ точекъ плоскости перемѣнной x, не лежащихъ на прямой $0...+\infty$.

§ 13. Изъ сказаннаго въ §§ 8, 10 и 12 слѣдуетъ, что, при всѣхъ значеніяхъ аргументовъ α, β и γ, общій интегралъ дифференціальнаго уравненія

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)x\right]\frac{dy}{dx}-\alpha\,\beta\,y=0 \qquad (6)$$

можетъ быть представленъ посредствомъ двухъ опредѣленныхъ интеграловъ, изъ которыхъ каждый есть функція конечная, сплошная и однозначная для всѣхъ точекъ координатной плоскости перемѣнной x, не лежащихъ на оси абсциссъ.

Слѣдовательно, если обратимъ вниманіе только на эти значенія перемѣнной x, модуль которыхъ не меньше единицы, то каждая функція, удовлетворяющая дифференціальному уравненію (6), для значеній перемѣнной x, не находящихся внутри круга, описаннаго изъ точки $x=0$ радіусомъ равнымъ единицѣ, есть функція конечная, сплошная и однозначная для всѣхъ точекъ, не лежащихъ на прямыхъ $+1...+\infty$ и $-1...-\infty$.

II.

§ 14. Выведенныя въ § 9 формулы

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right),$$
$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\beta} F\left(\alpha, \gamma-\alpha, \gamma, \frac{x}{x-1}\right), \tag{1}$$

получены были изъ сравненія опредѣленныхъ интеграловъ, обусловленныхъ нѣкоторыми предположеніями относительно аргументовъ α, β и γ. Легко провѣрить правдивость этихъ формулъ и въ томъ случаѣ, когда эти условія не исполнены.

Функція

$$y = F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

представляемая, для значеній x, модуль которыхъ меньше единицы, рядомъ

$$y = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma} x + \cdots, \tag{2}$$

удовлетворяетъ уравненію

$$x(1-x) \frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x] \frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0. \tag{3}$$

Положимъ

$$x = \frac{s}{s-1}, \tag{4}$$

тогда уравненіе (3) приметъ видъ

$$s(1-s)^2 \frac{d^2y}{ds^2} + (1-s) [\gamma + (\alpha+\beta-\gamma-1)s] \frac{dy}{ds} - \alpha\beta y = 0;$$

принимая же въ этомъ уравненіи

$$y = (1-s)^m z, \tag{5}$$

и раздѣливъ затѣмъ его члены на $(1-s)^m$, получимъ

$$s(1-s)^2\frac{d^2z}{ds^2}+(1-s)[\gamma+(\alpha+\beta-\gamma-2m-1)s]\frac{dz}{ds}$$

$$+\{m^2s+[(\gamma-\alpha-\beta)s-\gamma]m+\alpha\beta\}z=0. \qquad (6)$$

Чтобъ всѣ коэффиціенты этого уравненія дѣлились на $1-s$, т.-е. чтобъ оно могло быть приведено къ уравненію такому, какъ (3), слѣдуетъ дать m такое значеніе, чтобъ коэффиціентъ при z былъ кратнымъ величины $1-s$; это будетъ въ случаѣ

$$m=\alpha,\ m=\beta.$$

Для перваго изъ этихъ значеній, уравненіе (6) приметъ видъ

$$s(1-s)\frac{d^2z}{ds^2}+\{\gamma-[\alpha+(\gamma-\beta)+1]s\}\frac{dz}{ds}-\alpha(\gamma-\beta)z=0,$$

откуда видно, что этому уравненію будетъ удовлетворять гипергеометрическая функція

$$z=F(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,s);$$

для значеній s, модуль которыхъ меньше единицы, она можетъ быть представлена сходящимся рядомъ

$$z=1+\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{1.\gamma}s+\cdots$$

Слѣдовательно, на основаніи соотношеній (4) и (5), приходимъ къ первой изъ формулъ (1); другую получимъ при $m=\beta$.

§ 15. Такъ какъ рядъ

$$(1-x)^{-\alpha}z=(1-x)^{-\alpha}\left[1+\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{1.\gamma}\frac{x}{x-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha(\alpha+1)(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\cdots\right] \qquad (7)$$

удовлетворяетъ уравненію (3) и

$$\left[(1-x)^{-\alpha}z\right]_{x=0}=1,$$

$$\left[\frac{d}{dx}.(1-x)^{-\alpha}z\right]_{x=0}=\frac{\alpha\beta}{\gamma},$$

то рядъ (7), пока рядъ z сходящійся, представляетъ гипергеометрическую функцію $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, (§ 3). Рядъ z есть рядъ сходящійся для значеній перемѣнной x, отъ $x = \frac{1}{2}$ до $x = -\infty$; поэтому, гипергеометрическая функція $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ есть функція конечная, сплошная и однозначная для всѣхъ точекъ прямой $-1 \ldots -\infty$.

Сопоставляя это свойство функціи $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ [которая, по опредѣленію, для значеній x, находящихся внутри круга, описаннаго изъ точки $x = 0$ радіусомъ равнымъ единицѣ, представляема сходящимся рядомъ (2)], съ высказаннымъ въ § 13 свойствомъ всѣхъ функцій, удовлетворяющихъ уравненію (3), можемъ заключить, что гипергеометрическая функція $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ остается конечною, сплошною и однозначною во всѣхъ точкахъ координатной плоскости перемѣнной x, не лежащихъ на прямой $+1 \ldots +\infty$.

§ 16. Если въ гипергеометрическую функцію $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ вставимъ

$$x = \frac{4v}{(1+v)^2}, \quad v = \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}},$$

при условіи, что $\sqrt{1-x}$ придаемъ такой знакъ, чтобъ $v = 0$ для $x = 0$, то значеніямъ перемѣнной x, для которыхъ разсматриваемъ функцію $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, т.-е. всѣмъ точкамъ плоскости перемѣнной x, не лежащимъ на прямой $+1 \ldots +\infty$, будутъ соотвѣтствовать значенія перемѣнной v, находящіяся внутри круга, описаннаго изъ точки $v = 0$ радіусомъ равнымъ единицѣ, и обратно.

На основаніи доказаннаго (§ 15) свойста функціи $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, функція

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 4v(1+v)^{-2}) \tag{8}$$

есть конечная, сплошная и однозначная для всѣхъ значеній перемѣнной v, модуль которыхъ меньше единицы. Слѣдова-

тельно, эта функція можетъ быть представлена сходящимся рядомъ

$$1+C_1v+C_2v^2+\cdots$$

для значеній перемѣнной v, соотвѣтствующихъ всѣмъ тѣмъ значеніямъ перемѣнной x, для которыхъ разсматриваемъ гипергеометрическую функцію $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

Если въ дифференціальномъ уравненіи

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\Big(\gamma-(\alpha+\beta+1)x\Big)\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0, \tag{3}$$

которому удовлетворяетъ функція

$$y=F(\alpha,\beta,\gamma,x), \tag{9}$$

положимъ

$$x=\frac{4\,v}{(1+v)^2},$$

то это уравненіе приметъ видъ

$$v(1-v^2)(1+v)\frac{d^2y}{dv^2}+\Big(\gamma-2(2\alpha+2\beta-\gamma)v+(\gamma-2)v^2\Big)\frac{dy}{dv}$$

$$-4\alpha\beta(1-v)y=0; \tag{10}$$

слѣдовательно, при произвольныхъ аргументахъ α, β и γ, функція (8) не есть гипергеометрическая функція, четвертымъ аргументомъ которой было-бы v. Если примемъ

$$y=(1+v)^{2\alpha}w, \tag{11}$$

то уравненіе (10) перейдетъ въ уравненіе

$$v(1-v^2)\;\frac{d^2w}{dv^2}+\Big[\;\gamma-2(2\beta-\gamma)v+(\gamma-4\alpha-2)v^2\;\Big]\frac{dw}{d\,v}$$

$$-2\alpha\Big[\,2\beta-\gamma+(2\alpha+1-\gamma)v\;\Big]w=0. \tag{12}$$

Вставляя въ это уравненіе, вмѣсто w, разложеніе

$$w=d_0+d_1v+d_2v^2+\ldots+d_pv^p+d_{p+1}v^{p+1}+d_{p+2}v^{p+2}+\ldots, \tag{13}$$

получимъ, такъ какъ

$$[w]_{v=o}=[y]_{v=x=o}=1,$$

слѣдующія выраженія для коэффиціентовъ

$$d_o=1,\ d_1=\frac{2\alpha(2\beta-\gamma)}{\gamma},$$

$$d_2=\frac{(\alpha+1)(2\beta-\gamma)}{\gamma+1}d_1+\frac{\alpha(2\alpha+1-\gamma)}{\gamma+1}d_o, \qquad \Bigg\} \ (13')$$

$$d_{p+2}=\frac{2(2\beta-\gamma)(\alpha+p-1)}{(\gamma+p+1)(p+2)}d_{p+1}+\frac{(2\alpha+p)(2\alpha+1-\gamma+p)}{(\gamma+p+1)(p+2)}d_p.$$

Изъ (9) и (11) слѣдуетъ

$$F(\alpha,\beta,\gamma,4v(1+v)^{-2})=(1+v)^{2\alpha}w; \qquad (11')$$

такъ какъ первая часть этого соотношенія есть функція конечная, сплошная и однозначная для всѣхъ значеній v, имѣющихъ модуль меньше единицы, и такъ какъ, кромѣ того, для этихъ значеній v, множитель $(1+v)^{2\alpha}$ не обращается въ нуль, то функція w есть конечная, сплошная и однозначная функція отъ v, для всѣхъ значеній v, имѣющихъ модуль меньше единицы. Слѣдовательно, для всѣхъ значеній v, находящихся внутри круга, описаннаго изъ точки $v=0$ радіусомъ равнымъ единицѣ, т.-е. для всѣхъ значеній x, для которыхъ разсматриваемъ гипергеометрическую функцію $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, рядъ (13) есть сходящійся.

Если аргументы α и β, которые предполагались всегда независимыми, связаны соотношеніемъ

$$\alpha=\beta-\frac{1}{2},$$

то уравненіе (12) принимаетъ видъ

$$v(1-v)\frac{d^2w}{dv^2}+[\gamma-(4\alpha+2-\gamma)v]\frac{dw}{dv}-2\alpha(2\alpha+1-\gamma)w=0,$$

и рядъ (13) будетъ гипергеометрическимъ рядомъ

$$F(2\alpha, 2\alpha+1-\gamma, \gamma, v).$$

Слѣдовательно, въ этомъ частномъ случаѣ, на основаніи (9) и (11), имѣемъ

$$F\left(\alpha, \alpha+\frac{1}{2}, \gamma, 4v(1+v)^{-2}\right)=(1+v)^{2\alpha}F\left(2\alpha, 2\alpha+1-\gamma, \gamma, v\right),$$

или, обозначивъ 2α и $2\alpha+1-\gamma$ чрезъ α и β,

$$F(\alpha, \beta, \alpha-\beta+1, v)$$

$$=(1+v)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \alpha-\beta+1, 4v(1+v)^{-2}\right).$$

§ 17. Такимъ же образомъ, какъ въ § 14 мы доказали независимость второй и третьей изъ формулъ (24) § 9 отъ условій, предположенныхъ при ихъ выводѣ, можно доказать, что, при всѣхъ значеніяхъ аргументовъ α, β и γ, ряды (25) § 9 удовлетворяютъ дифференціальному уравненію

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0. \tag{3}$$

Всѣ эти ряды сходящіеся, пока модуль четвертаго аргумента меньше единицы.

Взявъ два ряда (25) § 9,

$$A_1 \text{ и } A_2,$$

представляющіе разные изъ интеграловъ (17′) § 7 и одновременно сходящіеся съ рядомъ $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, имѣемъ, при частныхъ значеніяхъ для постоянныхъ интегрированія C_1 и C_2, слѣдующую связь

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)=C_1 A_1+C_2 A_2. \tag{14}$$

Если чрезъ A обозначимъ одинъ изъ рядовъ (25) § 9, который не можетъ быть выведенъ ни изъ интеграла A_1 ни изъ

интеграла A_2 посредствомъ преобразованій Эйлера, и который одновременно сходится съ рядами A_1 и A_2, то опредѣленіе соотношеній (14) будетъ частнымъ случаемъ болѣе обширной задачи опредѣленія всѣхъ возможныхъ соотношеній

$$A = C_1 A_1 + C_2 A_2. \tag{14'}$$

Однакожъ, можно доказать, что соотношенія (14′) приводятся къ соотношеніямъ (14).

Между различными комбинаціами интеграловъ A, A_1 и A_2 являются только два случая: или два изъ этихъ интеграловъ принадлежатъ одному распредѣленію предѣловъ, или же эти три интегралы принадлежатъ различнымъ распредѣленіямъ. Но такъ какъ ни для одного значенія перемѣнной x не сходятся одновремѣнно три интеграла, изъ которыхъ каждый принадлежалъ-бы другому распредѣленію предѣловъ (§ 9), то послѣдній не возможенъ.

[Пр. Куммеръ въ § 11 мемуара *Ueber die hypergeometrische Reihe* etc. утверждаетъ, что связи между рядами, принадлежащими, по введенному здѣсь раздѣленію, къ распредѣленіямъ предѣловъ II и III, невозможны. Къ этому заключенію привело Куммера то обстоятельство, что онъ, раздѣливъ 24 ряда (25) на шесть классовъ, принимаетъ представителями ихъ тѣ изъ четырехъ видовъ, которые одновремѣнно не сходятся, и ихъ только разсматриваетъ [1]). Возмемъ напр. интегралы $II^a 3$, $III^a 1$ и $III^b 2$,

---

[1]) „Nimmt man von jeder sechs Classen ein beliebiges Integral. Als diese mögen angenommen werden die Integrale 1. ($I^a 1$), 3. ($I^b 1$), 5. ($II^a 3$), 7. ($II^b 3$), 13. ($III^a 3$) und 14. ($III^b 3$). Ich bemerke ferner dass die Integrale 5. und 7. mit den Integralen 13. und 14. nicht zu Gleichungen verbunden werden können, weil die einen allemal divergirende Reihe sind für die Werthe des x, für welche die andere convergiren, so lange wenigstens x einen realen Werth hat. Es sind also nur noch aus je dreien der Integrale 1., 3., 5. und 7., und aus je dreien der Integrale 1., 3., 13. und 14. die Gleichungen zu formiren." (pag. 55). Слѣдуетъ еще замѣтить, что у Куммера въ формулахъ (24.) и (25.) этого § должно быть $x^{1-\gamma}$ вмѣсто $(1-x)^{1-\gamma}$, а также въ выраженіи для B_2 должно быть $\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)$, а не $\Pi(\alpha+\beta-\gamma+1)$.

$$\left.\begin{aligned}&F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x),\\&x^{-\beta}F\left(\beta,\beta+1-\gamma,\beta+1-\alpha,\frac{1}{x}\right),\\&\text{и}\ x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\beta,\gamma-\beta,\alpha+1-\beta,\frac{1}{x}\right);\end{aligned}\right\}(15)$$

всѣ эти ряды сходятся для значеній $1<x<2$; слѣдовательно, искать связи (14′) между ними вполнѣ возможно].

Полагая въ интегралахъ (15)

$$1-x=y,\ \alpha+\beta+1-\gamma=\gamma',$$

приведемъ ихъ къ слѣдующимъ

$$F(\alpha,\beta,\gamma',y),$$

$$(1-y)^{-\beta}F\left(\beta,\gamma'-\alpha,\beta+1-\alpha,\frac{1}{1-y}\right),$$

$$y^{1-\gamma'}(1-y)^{\gamma'-\alpha-\beta}F\left(1-\beta,\alpha-\gamma'+1,\alpha+1-\beta,\frac{1}{1-y}\right),$$

т.-е. къ интеграламъ I^a1, III^a3 и III^b4. Подобнымъ образомъ можемъ всегда тотъ случай, когда ищемъ связь между интегралами распредѣленій предѣловъ II и III, привести къ такому, въ которомъ одно изъ двухъ распредѣленій предѣловъ есть распредѣленіе I.

Въ случаѣ, если изъ трехъ интеграловъ одинъ только принадлежитъ къ распредѣленію I и онъ есть одинъ изъ интеграловъ I^b, напр. когда слѣдуетъ связать интегралы

$$A=x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,x),$$

$$A_1=x^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha+\beta+1-\gamma,\frac{x-1}{x}\right),$$

$$A_2=x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\gamma-\beta,1-\beta,\gamma+1-\alpha-\beta,\frac{x-1}{x}\right),$$

то можно принять

$$\alpha+1-\gamma=\alpha', \beta+1-\gamma=\beta', 2-\gamma=\gamma'$$

и эти интегралы преобразовать такъ:

$$A=x^{1-\gamma}. F(\alpha',\beta',\gamma',x),$$

$$A_1=x^{\gamma'-1}.x^{-\alpha'}F\left(\alpha'+1-\gamma',\alpha',\alpha'+\beta'+1-\gamma',\frac{x-1}{x}\right)$$

$$=x^{1-\gamma}A_1',$$

$$A_2=x^{\gamma'-1}x.^{\beta'-\gamma'}(1-x)^{\gamma'-\alpha'-\beta'}$$

$$.F\left(1-\beta',\gamma'-\beta',\gamma'+1-\alpha'-\beta',\frac{x-1}{x}\right)$$

$$=x^{1-\gamma}A_2';$$

слѣдовательно, связь

$$A=C_1\ A_1+C_2\ A_2$$

представлена соотношеніемъ

$$F(\alpha',\beta',\gamma',x)=C_1\ A'_1+C_2\ A_2'.$$

Такимъ образомъ всѣ связи (14′) между тремя интегралами A, A_1 и A_2 приводятся къ связямъ (14) между интегралами I^a, I^b и II^a; I^a, I^b и II^b; I^a, I^b и III^a; I^a, I^b и III^b; I^a, II^a и II^b; I^a, III^a и III^b.

Связывая по формулѣ (14) интегралы I^a, I^b и II^a, слѣдуетъ опредѣлить значенія постоянныхъ C_1 и C_2, при которыхъ

$$I^a=C_1\ I^b+C_2\ II^a.$$

Изъ представленнаго этою формулою соотношенія

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=C_1x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,x)$$
$$+C_2F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x), \tag{16}$$

предполагая, что вещественныя части чиселъ $1-\gamma$ и $\gamma-\alpha-\beta$ положительны, получаемъ для $x=0$

$$1=C_2F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1),$$

а для $x=1$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=C_1F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,1)+C_2,$$

откуда, на основанiи формулы (3) § 4,

$$C_2=\frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\gamma)},$$

$$C_1=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)},$$

Эти значенiя для C_1 и C_2 мы получили при $1-\gamma_0>0$, $\gamma_0-\alpha_0-\beta_0>0$; но можно доказать, что онѣ вѣрны и въ остальныхъ случаяхъ, представляя въ другихъ видахъ интегралы входящiе во вторую часть соотношенiя (16), такъ что вообще

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\mathrm{I}^b$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\gamma)}\mathrm{II}^a. \qquad (17)$$

Формулы, относящiяся къ остальнымъ пяти случаямъ, суть

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\mathrm{I}^b$$
$$+\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(1-\gamma)}\mathrm{II}^b,$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}\mathrm{I}^b \qquad (17)$$
$$+\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(1-\gamma)}\mathrm{III}^a,$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\mathrm{I}^b$$

$$+\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma(1-\gamma)}\mathrm{III}^b,$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\mathrm{II}^a+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\mathrm{II}^b, \tag{17}$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\mathrm{III}^a+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}\mathrm{III}^b.$$

Въ этихъ соотношеніяхъ, вторыя ихъ части суть интегралы дифференціальнаго уравненія (3); слѣдовательно, представляють гипергеометрическую функцію $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ и для тѣхъ значеній перемѣнной x, для которыхъ рядъ (2) расходится. Во вторыхъ частяхъ каждой изъ формулъ (17) интегралы I^b, II^a, etc. могутъ быть представлены рядами, одновремѣнно сходящимися съ рядами, представляющими другой изъ этихъ интеграловъ. Эти формулы (17) можно примѣнять при такихъ значеніяхъ аргументовъ α, β и γ, при которыхъ коеффиціенты интеграловъ I^b, II^a etc. не обращаются въ безконечность.

Формулы представленныя шестью типами (17), рядъ (2), формулы (1) и формула (11′) могутъ служить для вычисленія значенія гипергеометрической функціи $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ для каждой точки координатной плоскости перемѣнной x, не лежащей на прямой $+1\ldots+\infty$.

III.

§ 18. Приведемъ нѣкоторыя изъ гипергеометрическихъ функцій.

$$F(1,n,1,x)=(1-x)^{-n};$$

$$F\left(1,-n,1,-\frac{u}{x}\right)=x^{-n}(x+u)^n;$$

$$F\left(-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{u^2}{x^2}\right)=\frac{(x+u)^n+(x-u)^n}{2x^n},$$

$$F\left(-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}n+1, \frac{3}{2}, \frac{u^2}{x^2}\right)=\frac{(x+u)^n-(x-u)^n}{2nux^{n-1}}.$$

При безконечно большомъ k, имѣемъ

$$F\left(1,k,1,\frac{x}{k}\right)=e^x \text{ [1]},$$

$$F\left(1,k,2,\frac{x}{k}\right)=\frac{e^x-1}{x},$$

$$F\left(1,k,3,\frac{x}{k}\right)=2\frac{e^x-x-1}{x^2},$$

и вообще, предполагая γ цѣлымъ положительнымъ числомъ,

$$F\left(1,k,\gamma,\frac{x}{k}\right)=(\gamma-1)\frac{e^x-(x^{\gamma-2}+x^{\gamma-3}+\ldots+x+1)}{x^{\gamma-1}};$$

$$F\left(k,k,\frac{1}{2},\frac{x^2}{4k^2}\right)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

$$F\left(k,k,\frac{3}{2},\frac{x^2}{4k^2}\right)=\frac{e^x-e^{-x}}{2x};$$

$$F\left(k,k,\frac{1}{2},-\frac{x^2}{4k^2}\right)=\cos x,$$

$$F\left(k,k,\frac{3}{2},-\frac{x^2}{4k^2}\right)=\frac{\sin x}{x}.$$

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\sin^2 x\right)=\frac{x}{\sin x},$$

---

[1]) Дифференціальное уравненіе (1) § 1, которому эта гипергеометрическая функція удовлетворяетъ, есть

$$x\frac{dy^2}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}-y=0.$$

$$F\left(1,1,\frac{3}{2}, sin^2x\right)=\frac{x}{sinxcosx},$$

$$F\left(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}, -tang^2x\right)=\frac{x}{tangx}.$$

$$F(1, 1, 2, x)=-\frac{log(1-x)}{x};$$

$$F\left(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}, x^2\right)=\frac{1}{2x}\,log\,\frac{1+x}{1-x},$$

$$F\left(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2},-x^2\right)=\frac{arctang\,x}{x};$$

$$F\left(\frac{1}{2}n,-\frac{1}{2}n,\frac{1}{2}, sin^2x\right)=cos\,nx,$$

$$F\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\frac{3}{2}, sin^2x\right)=\frac{sin\,nx}{n\,sinx},$$

etc *).

§ 19. Подобнымъ образомъ и нѣкоторые интегралы могутъ быть выражены посредствомъ гипергеометрическихъ функцій.

По формулѣ (2) § 4, имѣемъ

$$\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma,x).\quad(1)$$

Полагая въ этой формулѣ

$$\gamma=\beta+1,$$

приводимъ ее къ слѣдующей

$$\int_0^1 u^{\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du=\frac{1}{\beta}F(\alpha,\beta,\beta+1,x),$$

---

*) $\pi=2\,F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},1\right)$.

или, принимая

$$u = \frac{z}{x}$$

и вставляя x вмѣсто z и $\beta+1, -\alpha$ вмѣсто β и α,

$$\int_0^x x^\beta (1-x)^\alpha dx = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} F(-\alpha, \beta+1, \beta+2, x). \qquad (2)$$

По первой изъ формулъ (24) § 9,

$$F(-\alpha, \beta+1, \beta+2, x) = (1-x)^{1+\alpha} F(1, \beta+\alpha+2, \beta+2, x),$$

а потому полученный интегралъ можемъ представить такъ

$$\int_0^x x^\beta (1-x)^\alpha dx = \frac{x^{\beta+1}(1-x)^{\alpha+1}}{\beta+1} F(1, \alpha+\beta+2, \beta+2, x).$$

Если въ формулѣ (2) примемъ

$$\beta = \frac{\lambda}{\mu} - 1, \alpha = \nu,$$

то изъ нея получимъ

$$\int_0^x u^{\frac{\lambda}{\mu}-1} (1-u)^\nu du = \frac{\mu x^{\frac{\lambda}{\mu}}}{\lambda} F\left(-\nu, \frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu}+1, x\right);$$

полагая же

$$u = x^\mu,$$

имѣемъ

$$\int_0^x x^{\lambda-1} (1-x^\mu)^\nu dx = \frac{x^{\frac{\lambda}{\mu}}}{\lambda} F\left(-\nu, \frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu}+1, x\right).$$

Если въ формулѣ (1) положимъ

$$\alpha = m, \gamma = 2\beta, x = \frac{y}{m},$$

то получимъ

$$\int_0^1 (u(1-u))^{\beta-1}\left(1-\frac{uy}{m}\right)^{-m} du$$

$$=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} F\left(m, \beta, 2\beta, \frac{y}{m}\right),$$

откуда, при безконечно большомъ m,

$$\int_0^1 (u(1-u))^{\beta-1} e^{xu}\, du=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} F\left(m, \beta, 2\beta, \frac{x}{m}\right).$$

Вставивъ въ интегралъ (1) $\frac{1}{y}$ вмѣсто x, а въ интегралѣ

$$\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(y-u)^{-\alpha} du$$

$$=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)} y^{-\alpha} F(\alpha,\beta,\gamma,y^{-1}) \tag{1'}$$

полагая

$$u=\frac{m-v}{2m},\ m-2my=x,$$

$$\alpha=1,\ \beta=\gamma-\beta=1+m^2k,$$

получаемъ

$$\int_{-m}^{+m} \frac{\left(1-\frac{v}{m}\right)^{m^2k}\left(1+\frac{v}{m}\right)^{m^2k}}{x-v} dv$$

$$=-2^{2m^2k}\ \frac{\Gamma(1+m^2k)\Gamma(1+m^2k)}{\Gamma(2+2m^2k)}$$

$$\cdot \frac{2m}{m-x}\ F\left(1,\ 1+m^2k,\ 2+2m^2k,\ \frac{2m}{m-x}\right);$$

слѣдовательно, такъ какъ

$$\frac{\Gamma(1+m^2k)\Gamma(1+m^2k)}{\Gamma(2+2m^2k)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m^2k+1}}\,\frac{\Gamma(1+m^2k)}{\Gamma(\frac{3}{2}+m^2k)},$$

то, при безконечно большомъ m,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ku^2}}{x-u}\,du$$

$$=-\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+m^2k}}\,\frac{m}{m-x}F\left(1,\ 1+m^2k,\ 2+2m^2k,\ \frac{2m}{m-x}\right). \qquad (3)$$

Подобнымъ же образомъ изъ интеграла (1′), принимая въ немъ

$$u=\frac{m-v}{m},\ m-my=x,$$

$$\alpha=1,\ \beta=\gamma-1=1+mk,$$

получаемъ выраженіе для интеграла

$$\int_0^{+m}\frac{\left(1-\frac{v}{m}\right)^{mk}}{x-v}\,dv;$$

такъ какъ

$$\frac{\Gamma(1+mk)}{\Gamma(2+mk)}=\frac{1}{1+mk},$$

то, при безконечно большомъ m,

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-ku}}{x-u}\,du$$

$$=-\frac{1}{1+mk}\,\frac{m}{m-x}F\left(1,\ 1+mk,\ 2+mk,\ \frac{m}{m-x}\right). \qquad (4)$$

§ 20. Предположивъ въ формулѣ (1) предыдущаго параграфа

$$\alpha=\beta=\frac{1}{2}, \qquad (5)$$

$$\gamma=1,\ x=k^2,\ u=v^2,$$

получимъ, такъ такъ

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

слѣдующее выраженіе для полнаго эллиптическаго интеграла перваго рода

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}=\frac{\pi}{2}\,F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k^2\right). \tag{6}$$

Если въ (5) вмѣсто α примемъ $-\alpha=\frac{1}{2}$, то, при тѣхъ же самыхъ другихъ предположеніяхъ, для полнаго эллиптическаго интеграла втораго рода получимъ

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}\,du=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k^2\right). \tag{7}$$

Изъ выраженій (6) и (7) слѣдуетъ, что полные эллиптическіе интегралы перваго и втораго родовъ, умноженные на число $\frac{2}{\pi}$, суть гипергеометрическія функціи, имѣющіе четвертымъ аргументомъ квадратъ модуля.

Изъ выраженія (6) видно, что интегралъ

$$A=\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0, \tag{8}$$

если въ немъ принять

$$x=k^2,\ \alpha=\beta=\frac{1}{2},\ \gamma=1.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2k}\frac{dy}{dk},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{4k^2}\frac{d^2y}{dk^2}-\frac{1}{4k^3}\frac{dy}{dk},$$

и уравненіе (8) принимаетъ видъ

$$k(1-k^2)\frac{d^2A}{dk^2}+(1-3k^2)\frac{dA}{dk}-kA=0 \text{ *)}.$$

Такимъ же образомъ для интеграла (7) можно вывести уравненіе

$$k(1-k^2)\frac{d^2y}{dk^2}+(1-k^2)\frac{dy}{dk}+ky=0.\text{**)}$$

§ 21. Если въ функціи $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ одинъ изъ аргументовъ α и β есть цѣлое отрицательное число $-n$, которому не равно γ, то гипергеометрическая функція

$$F(-n, \beta, \gamma, x) \tag{9}$$

есть раціональная функція.

Примемъ

$$\beta=n-\lambda-\mu+1, \gamma=1-\mu;$$

тогда дифференціальное уравненіе (8), которому удовлетворяетъ функція

$$F(-n, n-\lambda-\mu+1, 1-\mu, x), \tag{9'}$$

приметъ видъ

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[1-\mu-(2-\lambda-\mu)x]\frac{dy}{dx}+n(n-\lambda-\mu+1)y=0. \tag{10}$$

---

*) Это уравненіе выведено въ Бріо и Букэ *Théorie des fonctions doublement périodiques.* (§ 235), посредствомъ очень сложныхъ пріемовъ.

**) Оба эти уравненія выведены были Лежандромъ въ *Théorie des fonctions elliptiques.* (t. I, § 46).

Другой интегралъ этого уравненія можетъ быть, по формулѣ (44) § 11, представленъ интеграломъ

$$x^{\mu}(1-x)^{\lambda}\int_0^1 \frac{t^{-\mu}(1-t)^{-\lambda}}{t-x} F(-n, n-\lambda-\mu+1, 1-\mu, t)\, dt, \qquad (11)$$

если только вещественныя части чиселъ $1-\lambda$ и $1-\mu$ положительны *). Но функція (9′) можетъ быть, по формулѣ (39a) § 11, представлена въ видѣ n-той производной

$$F(-n, n-\lambda-\mu+1, 1-\mu, x)$$

$$=\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(n-\mu+1)}\, x^{\mu}(1-x)^{\lambda}\frac{d^n}{dx^n}\,.\, x^{n-\mu}(1-x)^{n-\lambda}; \qquad (12)$$

поэтому, второй интегралъ уравненія (10) можетъ быть выраженъ интеграломъ

$$x^{\mu}(1-x)^{\lambda}\int_0^1 \frac{d^n}{dt^n}\left[t^{n-\mu}(1-t)^{n-\lambda}\right]\frac{dt}{t-x},$$

или же, послѣ интегрированія по частямъ, интеграломъ

$$x^{\mu}(1-x)^{\lambda}\int_0^1 \frac{t^{n-\mu}(1-t)^{n-\lambda}}{(t-x)^{n+1}}\, dt. \qquad (11')$$

Изъ сравненія выраженій (11) и (11′) слѣдуетъ

$$\int_0^1 \frac{t^{-\mu}(1-t)^{-\lambda}}{t-x} F(-n, n-\lambda-\mu+1, 1-\mu, t)\, dt$$

$$= c\int_0^1 \frac{t^{n-\mu}(1-t)^{n-\lambda}}{(t-x)^{n+1}}\, dt. \qquad (13)$$

гдѣ c есть нѣкоторая постоянная.

Если функцію, представляющую вторую часть равенства (12), умножить на

$$\frac{2^{\lambda+\mu}\Gamma(n-\mu+1)}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(n+1)},$$

*) Условіе (43) § 11 тогда выполнено, такъ какъ, въ разбираемомъ случаѣ, $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$, $f'(1)$ суть конечныя величины.

то ея производящею будетъ функція

$$F(s,\, 1-2x)$$

$$=\frac{\left(1+s+\sqrt{1+2s(2x-1)+s^2}\right)^{\lambda}\left(1-s+\sqrt{1+2s(2x-1)+s^2}\right)^{\mu}}{\sqrt{1+2s(2x-1)+s^2}} \quad (14)$$

или, при

$$x=\frac{1-z}{2},$$

функція

$$F(s,z)=\frac{\left(1+s+\sqrt{1-2sz+s^2}\right)^{\lambda}\left(1-s+\sqrt{1-2sz+s^2}\right)^{\mu}}{\sqrt{1-2sz+s^2}}.$$

Это провѣримъ слѣдующимъ образомъ. На основаніи формулы Лагранжа, имѣемъ, при

$$y=t+h\varphi(y),$$

$$f'(y)\,\frac{dy}{dt}=f'(t)+\frac{h}{1}\,\frac{d}{dt}[\varphi(t)f'(t)]+\frac{h^2}{1.2}\,\frac{d^2}{dt^2}[\varphi(t)^2 f'(t)]+\dots$$

Полагая въ этой формулѣ

$$\varphi(x)=x(1-x),$$

$$f'(x)=x^{-\mu}(1-x)^{-\lambda},$$

получаемъ

$$\frac{\left(s+1-\sqrt{1+2s(2x-1)+s^2}\right)^{-\lambda}\left(s-1+\sqrt{1+2s(2x-1)+s^2}\right)^{-\mu}}{(2s)^{-\lambda-\mu}\sqrt{1+2s(2x-1)+s^2}}$$

$$=\sum_n \frac{s^n}{1.2\ldots n}\,\frac{d^n}{dx^n}\,.\,x^{n-\mu}(1-x)^{n-\lambda},$$

откуда, на основаніи (12) и 14),

$$F(s,1-2x)=\sum\frac{2^{\lambda+\mu}\Gamma(n-\mu+1)}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(n+1)}s^nF(-n,n-\lambda-\mu+1,1-\mu,x),$$

или

$$F(s,z)$$

$$=2^{\lambda+\mu}\sum\frac{\Gamma(n-\mu+1)}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(n+1)}s^nF\left(-n,n-\lambda-\mu+1,1-\mu,\frac{1-z}{2}\right).$$

Эти функціи отъ z, производящею которыхъ есть функція $F(s,z)$, т. е. функціи

$$T_n=2^{\lambda+\mu}\frac{\Gamma(n-\mu+1)}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(n+1)}F\left(-n,n-\lambda-\mu+1,1-\mu,\frac{1-z}{2}\right),\quad(15)$$

названы П. Л. Чебышевымъ *) функціями подобными функціямъ Лежандра **).

---

*) *О функціяхъ подобныхъ функціямъ Лежандра.*

**) Примѣняя къ функціямъ, подобнымъ функціямъ Лежандра, формулы (24) § 9, можемъ эти функціи выразить въ четырехъ видахъ, а именно

$$T_n=2^{\lambda+\mu}\frac{\Gamma(n-\mu+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\mu)}F\left(-n,n-\lambda-\mu+1,1-\mu,\frac{1-z}{2}\right),$$

$$T_n=2^{\mu}\frac{\Gamma(n-\mu+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\mu)}(1+z)^{\lambda}F\left(n+1-\mu,\lambda-\mu,1-\mu,\frac{1-z}{2}\right),$$

$$T_n=2^{\lambda+\mu-n}\frac{\Gamma(n-\mu+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\mu)}(1+z)^nF\left(-n,\lambda-n,1-\mu,\frac{z-1}{z+1}\right),$$

$$T_n=2^{n+1}\frac{(n-\mu+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\mu)}(1+z)^{\lambda+\mu-n-1}$$

$$.F\left(n+1-\mu,n-\lambda-\mu+1,1-\mu,\frac{z-1}{z+1}\right).$$

Изъ формулъ (12) и (15) слѣдуетъ

$$T_n=\frac{(-1)^n2^{\lambda+\mu-n}}{1.2...n}(1+z)^{\lambda}(1-z)^{\mu}\frac{d^n}{dz^n}\left[(1+z)^{n-\lambda}(1-z)^{n-\mu}\right].$$

Слѣдовательно, можно сказать, что раціональныя гипергеометрическія функціи $F(-n, \beta, \gamma, x)$, если ихъ представить въ видѣ

$$F\left(-n, \beta, \gamma, \frac{1-z}{2}\right)$$

и умножить на постоянную величину

$$c_n = \frac{2^{n+1-\beta}\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\gamma)},$$

суть функціи, подобныя функціямъ Лежандра, и обратно, функціи T_n, подобныя функціямъ Лежандра, производящею которыхъ есть функція $F(s, 1-2x)$, умноженныя на $\frac{1}{c_n}$, суть гипергеометрическія функціи, имѣющія x четвертымъ аргументомъ.—

Функціи T_n, подобныя функціямъ Лежандра, при

$$\lambda = \mu = 0,$$

переходятъ въ функціи X_n, извѣстныя подъ именемъ Лежандровыхъ функцій *). Тогда, полагая въ функціи (14)

$$1 - 2x = z,$$

имѣемъ

$$(1 - 2zs + s)^{-\frac{1}{2}} = X_0 + X_1 s + \ldots + X_n s^n + \ldots,$$

Полагая въ уравненіи (10)

$$x = \frac{1-z}{2},$$

приводимъ его къ уравненію

$$(1-z^2)\frac{d^2T_n}{dz^2} + [\mu-\lambda-(2-\lambda-\mu)z]\frac{dT_n}{dz} + n(n-\lambda-\mu+1)T_n = 0.$$

[Ср. Н. Н. Алексѣева: *Изслѣдованія о функціяхъ подобныхъ функціямъ Лежандра. (Математическій Сборникъ.* Томъ V.)].

*) *Exercices de calcul intégral.* Tome II, 5-me partie. § X.

гдѣ

$$X_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{1.2...n}\left(z^n - \frac{n(n-1)}{2.(2n-1)} z^{n-2}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} z^{n-4} - ....\right),$$

или

$$X_n = F\left(-n,\ n+1,\ 1,\ \frac{1-z}{2}\right).$$

Слѣдовательно

$$(1 - 2zs + s^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_n F\left(-n,\ n+1,\ 1,\ \frac{1-z}{2}\right).s^n,$$

и Лежандровы функціи X_n суть гипергеометрическія функціи, имѣющія $\frac{1-z}{2}$ четвертымъ аргументомъ.

Полагая

$$\frac{1-z}{2} = x,$$

видимъ, что гипергеометрическая функція X_n удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$x(1-x)\frac{d^2X_n}{dx^2} + (1-2x)\frac{dX_n}{dx} + n(n+1)X_n = 0,$$

или, выведенному Лежандромъ *), уравненію

$$(1-z^2)\frac{d^2X_n}{dz^2} - 2z\frac{dX_n}{dz} + n(n+1)X_n = 0;$$

другой интегралъ этихъ уравненій можетъ быть, по формулѣ (11), представленъ выраженіемъ

$$\int_0^1 \frac{F(-n,\ n+1,\ 1,\ t)}{t-x}dt.$$

*) pag. 258.

Принимая въ формулѣ (12) $\lambda = \mu = 0$, получаемъ

$$X_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}\,.\,x^n(1-x)^n;$$

откуда, при $z = 1 - 2x$, находимъ Родригово выраженіе Лежандровыхъ функцій:

$$X_n = \frac{1}{2^n.1.2\ldots n}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n.$$

§ 22. Примѣромъ негипергеометрическихъ функцій, въ выраженія которыхъ входятъ гипергеометрическія *), могутъ служить коеффиціенты

$$P_{(0,n)},\ P_{(1,n)},\ldots,\ P_{(\lambda,n)},\ldots$$

разложенія

$$(1+x^2-2x\cos\varphi)^{-n}$$

$$= P_{(0,n)} + 2P_{(1,n)}\cos\varphi + \ldots + 2P_{(\lambda,n)}\cos\lambda\varphi + \ldots, \qquad (16)$$

свойства которыхъ разработаны Лежандромъ **).

Для этихъ функцій, представляющихъ значеніе интеграловъ

$$P_{(\lambda,n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\lambda\varphi\, d\varphi}{(1+x^2-2x\cos\varphi)^n}, \qquad (17)$$

Лежандръ вывелъ разложенія

$$P_{(\lambda,n)} = \frac{n\ldots(n-\lambda+1)}{1.2\ldots\lambda}x^\lambda\Big(1+\frac{n(n+\lambda)}{1.(\lambda+1)}x^2$$

$$+\frac{n(n+1)(n+\lambda)(n+\lambda+1)}{1.2.(\lambda+1)(\lambda+2)}x^4+\ldots\Big)\text{***}),$$

---

*) Гейне, въ *Handbuch der Kugelfunctionen*, изслѣдуя zugeordnete Functionen, часто пользуется выраженіемъ ихъ посредствомъ гипергеометрическихъ функцій.

**) *Exercices de calcul intégral.* Tome I, 3-me partie, § XII; t. II, 5-me partie, § XII. *Traité des fonctions elliptiques.* Tome II, appendice, sect I.

***) *Exerc.*, t. II, pag. 275.

и

$$P_{(\lambda,n)}=\frac{n...(n+\lambda-1)}{1.2...\lambda}\frac{x^\lambda}{(1-x^2)^n}\Bigg[1-\frac{(n-1)n}{1.(\lambda+1)}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)n(n+1)}{1.2.(\lambda+1)(\lambda+2)}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)^2+....\Bigg]\text{*)}.$$

При помощи гипергеометрическихъ функцій, эти разложенія могутъ быть представлены слѣдующимъ образомъ

$$P_{(\lambda,n)}=\frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(n)}x^\lambda F(n,\ n+\lambda,\ \lambda+1,\ x^2), \tag{18}$$

и

$$P_{(\lambda,n)}=\frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(n)}\frac{x^\lambda}{(1-x^2)^n}F\left(-n+1, n, \lambda+1, -\frac{x^2}{1-x^2}\right); \tag{19}$$

послѣднее разложеніе можетъ быть прямо выведено изъ предыдущаго, на основаніи второй изъ формулъ (24) § 9,

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=(1-x)^{-\alpha}F\left(\gamma-\beta,\alpha,\gamma,\frac{x}{x-1}\right).$$

Посредствомъ двухъ функцій

$$P_{(0,n)} \text{ и } P_{(0,n+1)},$$

Лежандръ представляетъ каждую функцію

$$P_{(\lambda,\pm n+k)}$$

(k цѣлое число) и ея производныя **). Ко всѣмъ этимъ соотношеніямъ можно придти на основаніи соотношеній между смежными гипергеометрическими функціями ***). Однакожь, какъ разложеніе (18), такъ и разложеніе (19) для функцій $P_{(0,n)}$,

---

*) pag. 291.

**) *Traité.*, § V.

***) См. ниже § 28.

$$P_{(0,n)} = 1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 x^2 + \left(\frac{n(n+1)}{1.2}\right)^2 x^4 + \ldots,$$

$$= (1-x^2)^{1-2n}\left[1 + \left(\frac{n-1}{1}\right)^2 x^2 + \left(\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\right)^2 x^4 + \ldots\right],$$

и $P_{(0,n+1)}$ не удобны, если значеніе x близко подходитъ къ единицѣ; тогда Лежандръ вычисляетъ функціи $P_{(\lambda,n)}$ посредствомъ интегрированія. — Примѣнимъ въ этомъ случаѣ формулы (17) § 17. Третій типъ даетъ

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,\ 1-x)$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x);$$

откуда, полагая

$$\alpha = \beta = n,\ \gamma = 1,\ x = x^2, \qquad (20)$$

получаемъ

$$P_{(0,n)} = \frac{\Gamma(1-2n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(1-n)} F(n,n,2n,1-x^2)$$

$$+ \frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} F(1-n,\ 1-n,\ 2-2n,\ 1-x^2),$$

Оба ряда второй части этого уравненія быстро сходятся именно для значеній x близкихъ къ единицѣ.

Функція $P_{(0,n)}$,

$$P_{(0,n)} = F(n,n,1,x^2) = (1-x^2)^{-n} F\left(1-n,\ n,\ 1,\ \frac{x^2}{x^2-1}\right),$$

удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0, \qquad (8)$$

при предположеніяхъ (20), т.-е. уравненію

$$x(1-x^2)\frac{d^2P_{(0,n)}}{dx^2}+[1-(4n+1)x]\frac{dP_{(0,n)}}{dx}-4n^2xP_{(0,n)}=0,$$

полученному Лежандромъ довольно сложнымъ образомъ *). Слѣдовательно, функція $P_{(0,n)}$ есть гипергеометрическая функція, четвертымъ аргументомъ которой есть x^2; но прочія функціи

$$P_{(1,n)},\ P_{(2,n)},\ldots$$

не удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравненіямъ, подобнымъ (8)-ому, и вообще невозможно такъ распредѣлить чиселъ λ и n, чтобъ функція

$$x^\lambda F(n,\ n+\lambda,\ \lambda+1,\ x^2),$$

для

$$\lambda=1,\ 2,\ldots,$$

приняла видъ одного изъ (25) § 9 интеграловъ Куммера**).

IV.

§ 23. Двѣ гипергеометрическія функціи

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x),\ \ F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x),$$

конечныя, сплошныя и однозначныя для всѣхъ точекъ координатной плоскости перемѣнной x, не лежащихъ на прямой $+1\ldots+\infty$, могутъ быть представлены сходящимися рядами

---

*) *Exerc.*, t. II, pag. 303.

**) Вчитываясь въ выше упоминаемый мемуаръ Эйлера *Specimen transformationis singularis serierum*, можно придти къ заключенію, что именно изслѣдованіе разложеній интеграла (17), который онъ разсматриваетъ въ этомъ же мемуарѣ (pag. 66 et seq.), привело Эйлера къ соотношенію

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x),$$

послужившему началомъ развитія теоріи гипергеометрическихъ функцій.

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\ldots, \tag{1}$$

$$F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)=1+\frac{\alpha(\beta+1)}{1.(\gamma+1)}x+\ldots \tag{2}$$

для точекъ, находящихся внутри круга, описаннаго изъ точки $x=0$ радіусомъ равнымъ единицѣ; отсюда получаемъ

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)-F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)=$$

$$\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\gamma(\gamma+1)}x\left[1+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{1.(\gamma+2)}x+\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.(\gamma+2)(\gamma+3)}x^2+\ldots\right],$$

или

$$\begin{aligned}&F(\alpha,\beta,\gamma,x)-F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)\\&=\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\gamma(\gamma+1)}xF(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x).\end{aligned} \tag{3}$$

Изъ этой формулы слѣдуетъ

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}=\frac{1}{1-\frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}\frac{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}}. \tag{4}$$

Отношеніе

$$\frac{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}=\frac{F(\beta+1,\alpha+1,\gamma+2,x)}{F(\beta+1,\alpha,\gamma+1,x)}$$

можетъ быть, по формулѣ (4), выражено

$$\begin{aligned}&\frac{F(\beta+1,\alpha+1,\gamma+2,x)}{F(\beta+1,\alpha,\gamma+1,x)}\\&=\frac{1}{1-\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x\frac{F(\alpha+1,\beta+2,\gamma+3,x)}{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)}}.\end{aligned}$$

Поступая такимъ же образомъ съ отношеніемъ

$$\frac{F(\alpha+1,\beta+2,\gamma+3,x)}{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2\ x)}$$

и по очереди съ каждымъ изъ получаемыхъ слѣдующихъ отношеній, приходимъ, на основаніи всѣхъ этихъ выраженій, къ непрерывной дроби

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{a_2x}{1-\ddots-\cfrac{a_{n-2}x}{1-a_{n-1}x\dfrac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}}}}}, \qquad (5)$$

гдѣ

$$a_{2m}=\frac{(\beta+m)(\gamma+m-\alpha)}{(\gamma+2m-1)(\gamma+2m)},$$

$$a_{2m+1}=\frac{(\alpha+m)(\gamma+m-\beta)}{(\gamma+2m)(\gamma+2m+1)}, \qquad (5')$$

$$\varphi_{2m}=F(\alpha+m,\beta+m,\gamma+2m,x),$$

$$\varphi_{2m+1}=F(\alpha+m,\beta+m,\gamma+2m+1,x).$$

Распространяя обозначеніе φ и на функціи первой части равенства (5), имѣемъ

$$\varphi_0=F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)$$

$$\varphi_1=F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1,x);$$

формулу же (3) можемъ представить въ видѣ

$$\varphi_{n-2}-\varphi_{n-1}=-a_{n-1}x\varphi_n. \qquad (3')$$

Придавая въ этой формулѣ числу n значенія

$$2,\ 3,\ \ldots,$$

получимъ групу такихъ соотношеній (3′), изъ которой слѣдуетъ, что двѣ функціи φ_{n-2} и φ_{n-1} не имѣютъ общаго корня, такъ какъ, въ противномъ случаѣ, для этого же значенія x приводились бы къ нулю и функціи

$$\varphi_n, \varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \dots;$$

поэтому и функціи

$$\varphi_0 = F(\alpha,\beta,\gamma,x),\ \varphi_1 = F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)$$

не имѣютъ общихъ корней.

Обозначимъ чрезъ $\frac{P_k}{Q_k}$ $(k+1)$-ую подходящую дробь разложенія (5), такъ что

$$\frac{P_k}{Q_k} = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_1 x}{1-\cfrac{a_2 x}{1-\cfrac{\ddots\, a_{k-2}}{1-\cfrac{a_{k-1}}{1}}}}}; \tag{6}$$

тогда

$$P_0 = 0\ ,\ Q_0 = 1,$$
$$P_3 = 1\ ,\ Q_1 = 1,$$
$$P_2 = 1\ ,\ Q_2 = 1 - a_1 x,$$

$$\left.\begin{aligned} P_{k+1} &= P_k - a_k x P_{k-1}, \\ Q_{k+1} &= Q_k - a_k x Q_{k-1}, \\ P_{k+1} Q_k - P_k Q_{k+1} &= a_1 a_2 \dots a_k x^k. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Такъ какъ, по вышесказанному, функціи φ_0 и φ_1, равно какъ и функціи φ_{n-1} и φ_n, не имѣютъ общаго множителя, то

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x) &= \varphi_{n-1} P_{n-1} - a_{n-1} x \varphi_n P_{n-2}, \\ F(\alpha, \beta, \gamma, x) &= \varphi_{n-1} Q_{n-1} - a_{n-1} x \varphi_n Q_{n-2}; \end{aligned} \tag{8}$$

откуда

$$Q_{n-1}F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)-P_{n-1}F(\alpha,\beta,\gamma,x)=a_1a_2..a_{n-1}x^{n-1}\varphi_n. \quad (9)$$

§ 24. По первой изъ формулъ (7), слѣдуетъ

$$\frac{P_k}{P_{k-1}}=1-\cfrac{a_{k-1}x}{1-\cfrac{a_{k-2}x}{1-\cdots\cfrac{a_2x}{1}}};$$

откуда

$$\frac{P_{k-1}}{P_k}=\cfrac{1}{1-\cfrac{a_{k-1}x}{1-\cfrac{a_{k-2}x}{1-\cdots-\cfrac{a_2x}{1}}}}; \quad (10)$$

на основаніи второй изъ формулъ (7), выводимъ

$$\frac{Q_{k-1}}{Q_k}=\cfrac{1}{1-\cfrac{a_{k-1}x}{1-\cfrac{a_{k-2}x}{1-\cdots-\cfrac{a_2x}{1-\cfrac{a_1x}{1}}}}}; \quad (11)$$

слѣдовательно

$$\frac{Q_{2m}}{Q_{2m+1}}=\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{(\beta+m)(\gamma-\alpha+m)}{(\gamma+2m)(\gamma+2m-1)}x}{1-\cfrac{\frac{(\alpha+m-1)(\gamma+m-1-\beta)}{(\gamma+2m-1)(\gamma+2m-2)}x}{1-\cdots-\cfrac{\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{(\gamma+1)\gamma}x}{1.}}}} \quad (11')$$

Но если функцію

$$\frac{F(-m-\beta,1-m-\alpha,1-\gamma-2m,x)}{F(-m-\beta,\ -m-\alpha,\ -\gamma-2m,x)}=\frac{\psi_1}{\psi_0}$$

разложить, по формулѣ (5), въ непрерывную дробь

$$\frac{\psi_1}{\psi_0}=\cfrac{1}{1-\cfrac{a_{2m}x}{1-\cdots -\cfrac{a_1 x}{1-\cfrac{a_0 x}{1-\cdots}}}}, \tag{12}$$

гдѣ

$$a_0=\frac{\beta(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-1)}, \ldots,$$

то это разложеніе, до $(2m+1)$-аго неполнаго частнаго включительно, совпадаетъ съ непрерывною дробію (11'). Слѣдовательно, если обозначимъ чрезъ $\frac{M_k}{N_k}$ $(k+1)$-ую подходящую дробь разложенія (12), а чрезъ ψ_{2l}, ψ_{2l+1} — функціи

$$\psi_{2l}=F(l-m-\alpha,l-m-\beta,2l-2m-\gamma,x),$$
$$\psi_{2l+1}=F(l+1-m-\alpha,l-m-\beta,2l+1-2m-\gamma,x),$$

соотвѣтствующія функціямъ φ_{2m}, φ_{2m+1} разложеніе (5), то, примѣняя формулу (9), имѣемъ

$$\begin{aligned}&N_l F(-m-\beta,1-m-\alpha,1-\gamma-2m,x)\\&-M_l F(-m-\beta,-m-\alpha,-\gamma-2m,x)\\&=a_{2m}a_{2m-1}\ldots a_{2m-(l-1)}x^l\psi_{l+1}.\end{aligned} \tag{13}$$

Но, такъ какъ изъ (11'), (10) и (11) слѣдуетъ, что

$$M_{2m+1}=Q_{2m},$$
$$N_{2m+1}=Q_{2m+1},$$
$$M_{2m}=P_{2m},$$
$$N_{2m}=P_{2m+1},$$

то, на основаніи формулы (13), имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} Q_{2m+1}\psi_1-Q_{2m}\psi_0&=a_0a_1\ldots a_{2m}x^{2m+1}\psi_{2m+2},\\ P_{2m+1}\psi_1-P_{2m}\psi_0&=a_1a_2\ldots a_{2m}x^{2m}\quad\psi_{2m+1}. \end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Эти два соотношенія, вмѣстѣ съ двумя соотношеніями (8), то-есть

$$\left.\begin{aligned} Q_{2m+1}\varphi_{2m+1}-a_{2m+1}xQ_{2m}\varphi_{2m+2}&=\varphi_0,\\ P_{2m+1}\varphi_{2m+1}-a_{2m+1}xP_{2m}\varphi_{2m+2}&=\varphi_1, \end{aligned}\right\}\quad(14)$$

дозволятъ опредѣлить P_{2m}, Q_{2m}, P_{2m+1} и Q_{2m+1}. Во всѣхъ выраженіяхъ для этихъ четырехъ величинъ, найдется знаменатель

$$\psi_0\varphi_{2m+1}-a_{2m+1}x_1\psi_1\varphi_{2m+2}=\chi.$$

Если къ функціямъ φ и ψ примѣнимъ формулу (3'), то можно χ представить такъ

$$\chi=\psi_1\varphi_{2m}-a_{2m}x\psi_2\varphi_{2m+1},$$

и далѣе

$$\chi=\psi_2\varphi_{2m-1}-a_{2m-1}x\psi_3\varphi_{2m},$$

и т. д. Слѣдовательно, значеніе χ не зависитъ отъ значенія числа m, а потому, такъ какъ для $m=-\alpha$, имѣемъ

$$a_{2m+1}=0, \psi_0=\varphi_{2m+1}=1,$$

то

$$\psi_0\varphi_{2m+1}-a_{2m+1}x\psi_1\varphi_{2m+2}=1.$$

Вслѣдствіе этого изъ формулъ (14) выводимъ: (15)

$$P_{2m}=F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)F(-m-\beta,1-m-\alpha,1-\gamma-2m,x)$$
$$-a_1\ldots a_{2m}x^{2m}F(\alpha+m,\beta+m+1,\gamma+2m+1,x)$$
$$.F(1-\alpha,-\beta,1-\gamma,x),$$

$$P_{2m+1}=F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)F(-m-\beta,-m-\alpha,-2m-\gamma,x)$$
$$-a_1\ldots a_{2m+1}x^{2m+1}F(\alpha+m+1,\beta+m+1,\gamma+2m+2,x)$$
$$.F(1-\alpha,-\beta,1-\gamma,x),$$

$$Q_{2m}=F(\alpha,\beta,\gamma,x)F(-m-\beta,1-m-\alpha,1-2m-\gamma,x)$$
$$-a_0a_1\ldots a_{2m}x^{2m+1}F(\alpha+m,\beta+m+1,\gamma+2m+1,x)$$
$$.F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,x),$$

$$Q_{2m+1}=F(\alpha,\beta,\gamma,x)F(-m-\beta,-m-\alpha,-2m-\gamma,x)$$
$$-a_0a_1\ldots a_{2m+1}x^{2m+2}F(\alpha+m+1,\beta+m+1,\gamma+2m+2,x)$$
$$.F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,x)\ ^{*)}.$$

§ 25. Изъ выраженій (5′) видно, что если по формулѣ (4) будемъ выражать каждое $\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n}$, то, при возрастающемъ n, отношеніе

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}$$

разлагается, по формулѣ (5), въ конечную непрерывную дробь когда α, или β, или $\gamma-\alpha$, или наконецъ $\gamma-\beta$ суть цѣлыя отрицательныя числа. Въ остальныхъ же случаяхъ, при безконечно возрастающемъ n, придемъ къ безконечной непрерывной дроби

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{a_2x}{1-\cdots\cfrac{}{\ -\cfrac{a_{n-2}x}{1-\cfrac{a_{n-1}x}{1-\cdots}}}}}} \qquad (16)$$

Эта безконечная непрерывная дробь стремится въ предѣлѣ къ отношенію

*) Ср. *Auszug eines Schreibens ueber Kettenbrueche von Herrn E. Heine an den Herausgeber*. Журналъ Креля, *LIII* томъ, стр. 284.

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)},$$

если выраженіе

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{R_{n-1}}{Q_{n-1}},$$

при безконечно возрастающемъ n, стремится въ предѣлѣ къ нулю. $\frac{R_{n-1}}{Q_{n-1}}$ можетъ быть, на основаніи формулъ (8) и третьей изъ формулъ (7), выражено слѣдующимъ образомъ

$$\frac{R_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{\varphi_{n-1}P_{n-1}-a_{n-1}x\varphi_nP_{n-2}}{\varphi_{n-1}Q_{n-1}-a_{n-1}x\varphi_nQ_{n-1}}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},$$

$$\frac{R_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{a_{n-1}x(P_{n-1}Q_{n-2}-Q_{n-1}P_{n-2})\varphi_n}{Q_{n-1}(\varphi_{n-1}Q_{n-1}-a_{n-1}x\varphi_nQ_{n-2})},$$

$$\frac{R_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{a_1a_2\ldots a_{n-1}x^{n-1}\varphi_n}{Q_{n-1}F(\alpha,\beta,\gamma,x)}. \qquad (17)$$

Подставимъ

$$x=\frac{4z}{(1+z)^2},\qquad z=\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}},$$

при условіи, что $\sqrt{1-x}$ имѣетъ такой знакъ, при которомъ $z=0$ для $x=0$; тогда всѣмъ точкамъ координатной плоскости перемѣнной x, не лежащимъ на прямой $+1\ldots.+\infty$, соотвѣтствуютъ значенія z, находящіяся внутри круга, описаннаго изъ точки $z=0$ радіусомъ равнымъ единицѣ, функціи

$$\varphi_n, Q_{n-1}, \varphi_0=F(\alpha,\beta,\gamma,x)$$

переходятъ въ функціи

$$\varphi_n(z), Q_{n-1}(z), \varphi_0=(z),$$

а выраженіе (17) принимаетъ видъ

$$\frac{R_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{a_1a_2\ldots a_{n-1}(4z)^{n-1}(1+z)^{2-2n}\varphi_n(z)}{Q_{n-1}(z)\varphi_0(z)}, \qquad (17')$$

и, если $n=2m+1$,—

$$\frac{R_{2m}}{Q_{2m}}=\frac{a_1 a_2 \dots a_{2m}(4z)^{2m}(1+z)^{-4m}\varphi_{2m+1}(z)}{Q_{2m}(z)\varphi_0(z)}$$

$$=\frac{a_1 a_2 \dots a_{2m}(4z)^{2m}.(1+z)^{-2m}\varphi_{2m+1}(z)}{(1+z)^{2m}Q_{2m}.\varphi_0(z)}. \qquad (17'')$$

Функціи $\varphi_0(z)$, $\varphi_{2m+1}(z)$ суть конечныя, сплошныя и однозначныя функціи, для всѣхъ значеній z, имѣющихъ модуль меньше единицы. Функцію

$$\varphi_{2m+1}(z)=F\left(\beta+m+1,\alpha+m,\gamma+2m+1,4z(1+z)^{-2}\right)$$

можемъ представить такъ

$$\varphi_{2m+1}(z)=(1+z)^{2(\beta+m+1)}w_{2m+1}(z),$$

гдѣ функція $w_{2m+1}(z)$, удовлетворяющая дифференціальному уравненію

$$z(1-z)^2\frac{d^2w_{2m+1}(z)}{dz^2}+$$

$$\left[\gamma+2m+1-2(2\alpha-\gamma-1)z+(\gamma-4\alpha-2m-1)z^2\right]\frac{dw_{2m+1}(z)}{dz}$$

$$-2(m+\beta+1)\left[2\alpha-\gamma-1+(2\beta-\gamma+z)z\right]w_{2m+1}(z)=0, \qquad (18)$$

для всѣхъ значеній z, имѣющихъ модуль меньше единицы, можетъ быть представлена сходящимся рядомъ

$$1+d_1z+d_2z^2+\dots,$$

(§ 16). Отдѣливъ въ уравненіи (18) члены, умноженные на $2m$, и остальные обозначивъ чрезъ $\chi(z)$, можемъ это уравненіе представить такъ

$$\frac{dw_{2m+1}(z)}{dz} - \frac{2\alpha-\gamma-1+(2\beta-\gamma+2)z}{1-z^2} w_{2m+1}(z)$$

$$+ \frac{1}{2m} \frac{\chi(z)}{1-z^2} = 0$$

Интегрируя, получаемъ

$$w_{2m+1}(z) = e^{\int_0^z \frac{2\alpha-\gamma-1+(2\beta-\gamma+2)z}{1-z^2}}$$

$$\cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2m} \int_0^z \frac{\chi(z)}{1-z^2} e^{-\int_0^z \frac{2\alpha-\gamma-1+(2\beta-\gamma+2)z}{1-z^2} dz} dz \right\},$$

а слѣдовательно, при безконечно возрастающемъ m,

$$\lim w_{2m+1}(z) = e^{\int_0^z \frac{2\alpha-\gamma-1+(2\beta-\gamma+2)z}{1-z^2} dz}$$

$$= (1-z)^{\frac{2\gamma-2\alpha-2\beta-1}{2}} (1+z)^{\frac{2\alpha-2\beta-3}{2}},$$

а

$$\lim \left[(1+z)^{-2m} \varphi_{2m+1}(z) \right] = \lim \left[(1+z)^{2\beta+2} w_{2m+1}(z) \right]$$

$$= (1-z)^{\frac{2\gamma-2\alpha-2\beta-1}{2}} (1+z)^{\frac{2\alpha+2\beta+1}{2}}. \qquad (19)$$

Въ произведеніи

$$a_1 a_2 \ldots a_{2m} (4z)^{2m},$$

при безконечно возрастающемъ m,

$$\lim a_{2m} = \frac{1}{4},$$

(5′); такъ какъ для значеній z, имѣющихъ модуль меньше единицы, рядъ

$$1+\sum a_1 a_2 \ldots a_{2m}(4z)^{2m}$$

есть рядъ сходящійся, то, для этихъ значеній z, при безконечно возрастающемъ m,

$$lim\left[a_1 a_2 \ldots a_{2m}(4z)^{2m}\right]=0. \tag{20}$$

Изъ (19) и (20) слѣдуетъ, что въ выраженіи (17''), при $n=\infty$

$$lim\left[a_1 a_2 \ldots a_{2m}(4z).^{2m}(1+z)^{-2m}\varphi_{2m+1}(z)\right]=0 \tag{21}$$

для всѣхъ значеній z, находящихся внутри круга, описаннаго изъ точки $z=0$ радіусомъ, равнымъ единицѣ.

Въ знаменателѣ выраженія (17''), вмѣсто Q_{2m} вставимъ выраженіе, данное третьею изъ формулъ (15),

$$Q_{2m}=\varphi_0\psi_1-a_0\ldots a_{2m}\, x^{2m+1}\varphi_{2m+1}\psi_{2m+2};$$

выражая x чрезъ z, обозначимъ чрезъ $\psi_1\ (z)$ и $\psi_{2m+1}(z)$ функціи отъ z, въ которыя переходятъ ψ_1 и ψ_{2m+1}, такъ что

$$(1+z)^{2m}Q_{2m}(z)=\varphi_0(z).\,(1+z)^{2m}\psi_1(z)$$
$$-a_0 a_1\ldots a_{2m}(4z)^{2m+1}.(1+z)^{2-2m}\varphi_{2m+1}(z).\psi_{2m+2}(z).$$

Такъ какъ функція

$$\psi_{2m+2}(z)=F[1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ 4z(1+z)^{-2}]$$

остается конечною для всѣхъ значеній z, имѣющихъ модуль меньше единицы, то, на основаніи (21), для этихъ значеній z, при безконечно возрастающемъ m,

$$lim[a_0 a_1\ldots a_{2m}(4z)^{2m+1}.(1-z)^{2-2m}\varphi_{2m+1}(z).\psi_{2m+2}(z)]=0. \tag{22}$$

Если функцію

$$\psi_1\ (z)=F[-m-\beta,\ 1-m-\alpha,\ 1-2m-\gamma,\ 4z(1+z)^{-2}]$$

представимъ въ видѣ

$$\psi_1(z) = (1+z)^{-2(m+\beta)} v_1(z),$$

то, подобнымъ образомъ, какъ для $w_{2m+1}(z)$ можемъ найти, что, для значеній z, имѣющихъ модуль меньше единицы, представляемая сходящимся рядомъ

$$1+d_1 z + d_2 z^2 + \ldots,$$

(§ 16), функція $v_1(z)$, при безконечно возрастающемъ m, стремится въ предѣлѣ къ

$$lim\, v_1(z) = (1-z)^{\frac{2\alpha+2\beta-2\gamma-1}{2}} (1+z)^{\frac{2\beta-2\alpha+1}{2}},$$

и что

$$lim[(1+z)^{2m}\psi_1(z)] = (1-z)^{\frac{2\alpha+2\beta-2\gamma-1}{2}} (1+z)^{\frac{1-2\alpha-2\beta}{2}}. \quad (23)$$

Изъ (22) и (23) слѣдуетъ, что

$$lim[Q_{2m}(z)(1+z)^{2m} . \varphi_0(z)]$$

$$= (1-z)^{\frac{2\alpha+2\beta-2\gamma-1}{2}} (1+z)^{\frac{1-2\alpha-2\beta}{2}} \varphi_0(z)^2. \quad (24)$$

Изъ выраженій (19), (20) и (24) видно, что $\frac{R_{2m}}{Q_{2m}}$ для значеній z, находящихся внутри круга, описаннаго изъ точки $z=0$ радіусомъ равнымъ единицѣ, и не обращающихъ въ нуль функціи $\varphi_0(z)$, при безконечно возрастающемъ m, стремится въ предѣлѣ къ произведенію конечной величины

$$[(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}(1+z)^{\alpha+\beta}\varphi_0(z)]^2,$$

на

$$lim[a_1 a_2 \ldots a_{2m}(4z)^{2m}] = 0.$$

Къ такому же результату приходимъ, предполагая, что въ выраженіи (17′) n число четное.

Слѣдовательно, безконечная непрерывная дробь (16) во всѣхъ точкахъ координатной плоскости перемѣнной x, не лежащихъ на прямой $+1 \ldots +\infty$ и не обращающихъ въ нуль функціи $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, стремится въ предѣлѣ къ отношенію

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}\text{*)}.$$

§ 26. Напр. если въ разложеніи

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_1 x}{1-\cfrac{a_2 x}{1-\ldots}}},$$

$$a_{2m} = \frac{(\beta+m)(\gamma+m-\alpha)}{(\gamma+2m-1)(\gamma+2m)},$$

$$a_{2m+1} = \frac{(\gamma+m)(\gamma+m-\beta)}{(\gamma+2m)(\gamma+2m+1)},$$

положимъ

$$\beta=\alpha,\ \gamma=\frac{1}{2},\ x=\frac{x_1^{\,2}}{4\alpha^2},$$

то, при безконечно возрастающемъ α,

$$F\left(\alpha, \alpha, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4\alpha^2}\right) = \frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

$$F\left(\alpha, \alpha, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{4\alpha^2}\right) = \frac{e^x-e^{-x}}{2x},$$

и

---

*) Это свойство въ первый разъ доказано Л. Томэ, въ LXVII-омъ томѣ журнала Креля.

$$\frac{e^x-e^{-x}}{x(e^x+e^{-x})}=\cfrac{1}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\cfrac{x^2}{7+\dots}}}},$$

а слѣдовательно,

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\cfrac{x^2}{7+\dots}}}}$$

для всѣхъ конечныхъ значеній перемѣнной x. Принявъ въ послѣднемъ разложеніи xi вмѣсто x, получаемъ для всѣхъ конечныхъ значеній x и не обращающихъ въ нуль функціи

$$F\left(\alpha, \alpha, \frac{1}{2}, -\frac{x^2}{4\alpha^2}\right)=cos x,$$

такое разложеніе

$$tang\, x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\dots}}}}$$

V.

§ 27. Къ разложенію

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{a_1 x}{1-\cfrac{a_2 x}{1-\dots}}}, \qquad (1)$$

$$a_{2m}=\frac{(\beta+m)(\gamma+m-\alpha)}{(\gamma+2m-1)(\gamma+2m)},$$

$$a_{2m+1}=\frac{(\alpha+m)(\gamma+m-\beta)}{(\gamma+2m)(\gamma+2m+1)},$$

мы пришли въ § 23 изъ соотношенія

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)-F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)$$

$$=-\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}x\,F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x), \qquad (2)$$

связывающаго три гипергеометрическія функціи, въ которыхъ четвертый аргументъ одинъ и тотъ-же, а три первые отличаются цѣлымъ числомъ. Такимъ же образомъ, какъ въ § 23 соотношеніе (2), могутъ быть выведены слѣдующія соотношенія

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)-F(\alpha+1,\beta,\gamma,x)$$

$$=-\frac{\beta}{\gamma}x\,F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x), \qquad (3)$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)-F(\alpha-1,\beta+1,\gamma,x)$$

$$=-\frac{\alpha-\beta-1}{\gamma}x\,F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x), \qquad (4)$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)-F(\alpha+1,\beta-1,\gamma,x)$$

$$=-\frac{\beta-\alpha-1}{\gamma}x\,F(\alpha+1,\beta,\gamma+1,x), \qquad (5)$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)-F(\alpha,\beta+1,\gamma,x)$$

$$=-\frac{\alpha}{\gamma}x\,F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x), \qquad (6)$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)-F(\alpha,\beta,\gamma+1,x)$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\gamma(\gamma+1)}x\,F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x). \qquad (7)$$

Изъ соотношеній (3), (4), (5), (6) слѣдуетъ

$$\frac{F(\alpha+1,\beta,\gamma,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}=\frac{1}{1-\frac{\beta}{\gamma}x\frac{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha+1,\beta,\gamma,x)}}, \quad (8)$$

$$\frac{F(\alpha-1,\beta+1,\gamma,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}=\frac{1}{1-\frac{\alpha-\beta-1}{\gamma}x\frac{F(\beta+1,\alpha,\gamma+1,x)}{F(\beta+1,\alpha-1,\gamma,x)}},$$

$$\frac{F(\alpha+1,\beta-1,\gamma,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}=\frac{1}{1-\frac{\beta-\alpha-1}{\gamma}x\frac{F(\alpha+1,\beta,\gamma+1,x)}{F(\alpha+1,\beta-1,\gamma,x)}},$$

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}=\frac{1}{1-\frac{\alpha}{\gamma}x\frac{F(\beta+1,\alpha+1,\gamma+1,x)}{F(\beta+1,\alpha,\gamma,x)}};$$

каждое изъ отношеній гипергеометрическихъ функцій, входящихъ въ знаменатели вторыхъ частей, можетъ быть далѣе разложено по формулѣ (1).

По формуламъ (8) и (1) можно разложить въ непрерывную дробь отношеніе полныхъ эллиптическихъ интеграловъ перваго и втораго родовъ

$$\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}=\frac{\pi}{2}F\left(+\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k^2\right),$$

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}du=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k^2\right),$$

(§ 20). Примѣняя формулы (8) и (1), получаемъ

$$\frac{F\left(+\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k^2\right)}{F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k^2\right)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{1}{2}k^2}{1-\cfrac{\frac{1}{8}k^2}{1-\cfrac{\frac{3}{8}k^2}{1-\cfrac{\frac{3}{16}k^2}{1-\cfrac{\frac{5}{16}k^2}{1-\cdots}}}}}}$$

§ 28. Изъ формулы (7) предыдущаго § слѣдуетъ

$$\frac{F(\alpha,\beta,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}=1-\frac{\alpha\beta}{\gamma(\gamma+1)}x\frac{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)},$$

откуда, на основаніи формулы (2),

$$\frac{F(\alpha,\beta,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}=\frac{\gamma}{\gamma-\beta}-\frac{\beta}{\gamma-\beta}x\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}. \quad (9)$$

Формулъ подобныхъ (2)—(7)-ой, связывающихъ три гипергеометрическія функціи, первые три аргументы которыхъ отличаются цѣлыми числами, — безконечное множество; но онѣ всѣ могутъ быть выведены изъ формулъ связывающихъ гипергеометрическую функцію $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ съ двумя разными гипергеометрическими функціями

$$F(\alpha+\lambda_1,\beta+\mu_1,\gamma+\nu_1,x),\ F(\alpha+\lambda_2,\beta+\mu_2,\gamma+\nu_2,x),$$

въ которыхъ числа $\lambda_1,\mu_1,\nu_1,\lambda_2,\mu_2,$ и ν_2 имѣютъ значенія $0, +1$ и -1 *). Посредствомъ такихъ соотношеній можно всегда двумя гипергеометрическими функціями

*) Эти „связи между смежными функціями" (Гауссъ: Relationes inter functiones contiguas) представляются, какъ замѣчаетъ Гауссъ, въ видѣ

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x), \ F(\alpha+\lambda_1, \beta+\mu_1, \gamma+\nu_1, x)$$

выразить линейнымъ образомъ каждую гипергеометрическую функцію

$$F(\alpha+\vartheta, \beta+\eta, \gamma+\zeta, x),$$

гдѣ ϑ, η, ζ цѣлыя числа. Обозначивъ чрезъ ω_0 и ω_1 нѣкоторыя цѣлыя функціи отъ x, можемъ эти соотношенія представить такъ:

$$F(\alpha+\vartheta, \beta+\eta, \gamma+\zeta, x)$$

$$=\omega_0 F(\alpha, \beta, \gamma, x)+\omega_1 F(\alpha+\lambda_1, \beta+\mu_1, \gamma+\nu_1, x),$$

откуда

$$\frac{F(\alpha+\vartheta, \beta+\eta, \gamma+\zeta, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}=\omega_0+\omega_1\frac{F(\alpha+\lambda_1, \beta+\mu_1, \gamma+\nu_1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}. \quad (10)$$

При $\lambda_1=0$, $\mu_1=\nu_1=1$, формула (9) представляетъ частный случай формулы (10).

Слѣдовательно, отношеніе

$$\frac{F(\alpha+\vartheta, \beta+\eta, \gamma+\zeta, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}, \quad (11)$$

при цѣлыхъ значеніяхъ чиселъ ϑ, η и ζ, можетъ быть разложено въ непрерывную дробь; если эта дробь безконечна, то она, для всѣхъ значеній перемѣнной x, не лежащихъ на

---

325 разныхъ соотношеній, изъ которыхъ въ *Disquisitiones generales circa seriem* etc. (§§ 7—11) выведены 24 (формулы [1]—[15], I, II, VI, [16]—[18], [21]—[23]). По замѣчанію Гейне (Журналъ Креля, XXXIV томъ, 292 стр), въ Гауссовыхъ формулахъ [4] и [11] должно быть $x F(\alpha, \beta, \gamma+1, x)$ вмѣсто $F(\alpha, \beta, \gamma+1, x)$, формула-же [23] оказывается невѣрною; если однакожъ въ этой формулѣ, вмѣсто $F(\alpha-1, \beta+1, \gamma, x)$ поставить $F(\alpha, \beta+1, \gamma, x)$, а вмѣсто $F(\alpha+1, \beta-1, \gamma, x) - F(\alpha+1, \beta, \gamma, x)$, то равенство возстанавливается.

прямой $+1 \ldots +\infty$ и не обращающихъ функціи $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ въ нуль, стремится къ отношенію (11).

§ 29. Полагая въ разложеніи (1) $\beta=0$ и замѣняя $\gamma+1$ посредссвомъ γ, получаемъ слѣдующее разложеніе для функціи $F(\alpha, 1, \gamma, x)$

$$F(\alpha,1,\gamma,x)=\cfrac{1}{1-\cfrac{b_1 x}{1-\cfrac{b_2 x}{1-\cdots-\cfrac{b_n x}{1-\cdots}}}}, \tag{12}$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} b_1&=\frac{\alpha}{\gamma},\quad b_2=\frac{\gamma-\alpha}{\gamma(\gamma+1)},\\ b_{2m}&=\frac{m(\gamma+m-1-\alpha)}{(\gamma+2m-2)(\gamma+2m-1)},\\ b_{2m+1}&=\frac{(\alpha+m)(\gamma+m-1)}{(\gamma+2m-1)(\gamma+2m)},\end{aligned}\right\} \tag{12'}$$

Изъ формулъ (15) § 24, (такъ какъ, для $\beta=0$,

$$\alpha_0=0),$$

получаемъ для знаменателей подходящихъ дробей разложенія (12) слѣдующія выраженія

$$\begin{aligned} Q_{2m}&=F(-m, 1-m-\alpha, 2-2m-\gamma,x),\\ Q_{2m+1}&=F(-m, -m-\alpha, 1-2m-\gamma,x).\end{aligned} \tag{13}$$

Если въ функціи $F(\alpha, 1, \gamma, x)$, $\gamma=\alpha$, или если γ или $\gamma-\alpha$ суть цѣлыя отрицательныя числа, то функція $F(\alpha, 1, \gamma, x)$

разлагается въ конечную непрерывную дробь. Во всѣхъ же остальныхъ случаяхъ, при безконечно возрастающемъ n, непрерывная дробь

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{b_1x}{1-\cfrac{b_2x}{1-\ddots}}}$$

для всѣхъ значеній x, не лежащихъ на прямой $+1\ldots+\infty$, стремится въ предѣлѣ къ функціи $F(\alpha,1,\gamma,x)$.

Полагая въ формулѣ (10) предыдущаго параграфа

$$\beta=0,\ \mu_1=1,\ \lambda_1=\nu_1=0,$$

получаемъ

$$F(\alpha+\vartheta,\eta,\gamma+\zeta,x)=\omega_0+\omega_1 F(\alpha,1,\gamma,x);$$

слѣдовательно, каждая функція $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, въ которой одинъ изъ первыхъ двухъ аргументовъ есть цѣлое число, можетъ быть разложена въ непрерывную дробь, которая, для всѣхъ значеній x, не лежащихъ на прямой $+1\ldots+\infty$, стремится къ функціи $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$.

§ 30. По формулѣ (12) можемъ разложить въ непрерывную дробь нѣкоторыя изъ приведенныхъ въ § 18 гипергеометрическихъ функцій. Напр.

$$(1+x)^{\mu}=F(1,-\mu,1,-x);$$

слѣдовательно, для всѣхъ значеній x, не лежащихъ на прямой $-1\ldots-\infty$,

$$(1+x)^n=\cfrac{1}{1-\cfrac{nx}{1+\cfrac{\frac{n+1}{2}x}{1-\cfrac{\frac{n-1}{2.\,3}x}{1+\cfrac{\frac{2(n+2)}{3.4}x}{1-\cfrac{\frac{2(n-2)}{4.5}x}{1+\ddots}}}}}}=\cfrac{1}{1-\cfrac{nx}{1+\cfrac{1.(n+1)x}{2-\cfrac{1.(n-1)x}{3+\cfrac{2(n+2)x}{4-\cfrac{2(n-2)x}{5+\ddots}}}}}}$$

Для всѣхъ конечныхъ значеній x,

$$e^x=F\left(1, k, 1, \frac{x}{k}\right),\quad k=\infty,$$

разлагается въ непрерывную дробь

$$e^x=\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{1}{2}x}{1-\cfrac{\frac{1}{6}x}{1+\cfrac{\frac{1}{6}x}{1-\cfrac{\frac{1}{10}x}{1+\cfrac{\frac{1}{10}x}{1-\ddots}}}}}}}=\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{1.x}{2-\cfrac{1.x}{3+\cfrac{2x}{4-\cfrac{2x}{5+\cfrac{3x}{6-\ddots}}}}}}}$$

$$\frac{\log(1+x)}{x}=F(1, 1, 2, -x);$$

слѣдовательно, для всѣхъ значеній x, не лежащихъ на прямой $-1\ldots-\infty$,

$$\log(1+x)=\cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{1}{2}x}{1+\cfrac{\frac{1}{6}x}{1+\cfrac{\frac{2}{6}x}{1+\cfrac{\frac{2}{10}x}{1+\cfrac{\frac{3}{10}x}{1+\cfrac{\frac{3}{14}x}{1+\ldots}}}}}}}=\cfrac{x}{1+\cfrac{1.^2x}{2+\cfrac{1.^2x}{3+\cfrac{2.^2x}{4+\cfrac{2.^2x}{5+\cfrac{3^2x}{6+\cfrac{3^2x}{7+\ldots}}}}}}}$$

$$\frac{1}{2x}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=F\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},x^2\right),$$

$$\frac{arctang\ x}{x}=F\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-x^2\right);$$

слѣдовательно для всѣхъ значеній x, не лежащихъ на прямыхъ $+1\ldots+\infty$ и $-1\ldots-\infty$, имѣемъ

$$\log\frac{1+x}{1-x}=\cfrac{2x}{1-\cfrac{\frac{1}{3}x^2}{1-\cfrac{\frac{2.2}{3.5}x^2}{1-\cfrac{\frac{3.3}{5.7}x^2}{1-\cfrac{\frac{4.4}{7.9}x^2}{1-\ldots}}}}}=\cfrac{2x}{1-\cfrac{(1.x)^2}{3-\cfrac{(2x)^2}{5-\cfrac{(3x)^2}{7-\cfrac{(4x)^2}{9-\ldots}}}}};$$

$$\operatorname{arctang} x = \cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{1}{3}x^2}{1+\cfrac{\frac{2.2}{3.5}x^2}{1+\ldots}}} = \cfrac{x}{1+\cfrac{(1.x)^2}{3+\cfrac{(2.x)^2}{5+\ldots}}}$$

§ 31. По формулѣ (12) можемъ вообще, для всѣхъ значеній x, не лежащихъ на прямой $+1 \ldots +\infty$, разложить въ непрерывную дробь функцію

$$\int_0^1 u^{-\mu}(1-u)^{-\lambda}(1-xu)^{-1}du = CF(1, 1-\mu, 2-\mu-\lambda, x),$$

гдѣ

$$C = \frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(2-\lambda-\mu)},$$

§ (19), или, полагая

$$x = \frac{1}{y},$$

—функцію

$$y\int_0^1 \frac{u^{-\mu}(1-u)^{-\lambda}}{y-u}du = CF(1, 1-\mu, 2-\mu-\lambda, y^{-1}).$$

Тогда, для всѣхъ значеній x, не лежащихъ на прямой $0 \ldots +1$, имѣемъ

$$F(1, 1-\mu, 2-\mu-\lambda, y^{-1}) = \cfrac{1}{1-\cfrac{b_1}{y-\cfrac{b_2}{1-\cfrac{b_3}{y-\ldots \cfrac{}{-\cfrac{b_{2m}}{1-\cfrac{b_{2m+1}}{y-\ldots}}}}}}},$$

гдѣ

$$b_1=\frac{1-\mu}{2-\mu-\lambda},\, b_2=\frac{1-\lambda}{(2-\mu-\lambda)(3-\mu-\lambda)},$$

$$b_{2m}=\frac{m(m-\lambda)}{(2m-\mu-\lambda)(2m-\mu-\lambda+1)},$$

$$b_{2m+1}=\frac{(m-\mu+1)(m-\mu-\lambda+1)}{(2m-\mu-\lambda+1)(2m-\mu-\lambda+2)};$$

слѣдовательно

$$\frac{1}{c}\int_0^1\frac{u^{-\mu}(1-u)^{-\lambda}}{y-u}du=y^{-1}F(1,1-\mu,2-\mu-\lambda,y^{-1})$$

$$=\cfrac{1}{y-\cfrac{b_1}{1-\cfrac{b_2}{y-\cdots\cfrac{}{\cdots-\cfrac{b_{2m}}{y-\cfrac{b_{2m+1}}{1-\cdots}}}}}}\tag{14}$$

Для знаменателей подходящихъ дробей послѣдняго разложенія получаемъ, на основаніи формулъ (13),

$$\left.\begin{aligned}Q_{2m}&=y^mF(-m,-m+\mu,-2m+\mu+\lambda,y^{-1}),\\ Q_{2m+1}&=y^{m+1}F(-m,-m+\mu-1,-2m+\mu+\lambda-1,y^{-1}).\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

Напр., полагая $\frac{1}{x}$ вмѣсто x въ формулѣ

$$\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{1-x^2u}du=F\left(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^2\right)=\frac{1}{2x}log\frac{1+x}{1-x},$$

для значеній x, не лежащихъ на прямой $-1\ldots+1$, получаемъ

$$\frac{x^2}{2}\int_0^1 \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{x^2-u}\,du=\frac{x}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{du}{x-u}=F\left(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^{-2}\right)=\frac{x}{2}\log\frac{x+1}{x-1},$$

и слѣдовательно

$$\log\frac{x+1}{x-1}=2x.x^{-2}F\left(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^{-2}\right)$$

$$=\cfrac{2x}{x^2-\cfrac{\frac{1}{3}}{1-\cfrac{\frac{2.2}{3.5}}{x^2-\cfrac{\frac{3.3}{5.7}}{1-\cfrac{\frac{4.4}{7.9}}{x^2-\ldots}}}}},$$

или

$$\log\frac{x+1}{x+1}=\cfrac{2}{x-\cfrac{\frac{1}{3}}{x-\cfrac{\frac{2.2}{3.5}}{x-\cfrac{\frac{3.3}{5.7}}{x-\cfrac{\frac{4.4}{7.9}}{x-\ldots}}}}} \tag{16}$$

Знаменатели подходящихъ дробей послѣдняго разложенія *), на основаніи формулъ (15), суть

---

*) Эти знаменатели даны Гауссомъ въ *Methodus nova integralium valores* etc. (§ 17).

$$Q_{2m}=(x^2)^m F\left(-m,-m+\frac{1}{2},-2m+\frac{1}{2},x^{-2}\right)$$

$$=x^{2m} F\left(-m,-m+\frac{1}{2},-2m+\frac{1}{2},x^{-2}\right),$$

$$Q_{2m+1}=x^{-1}.(x^2)^{m+1} F\left(-m,-m-\frac{1}{2},-2m-\frac{1}{2},x^{-2}\right)$$

$$=x^{2m+1} F\left(-m,-m-\frac{1}{2},-2m-\frac{1}{2},x^{-2}\right).$$

Если чрезъ X_n обозначимъ Лежандровы функціи

$$X_{2m}=\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(4m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\left[x^{2m}-\frac{m}{1}\frac{2m-1}{4m-1}x^{2m-2}\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(2m-1)(2m-3)}{(4m-1)(4m-3)}x^{2m-4}-\ldots\right],$$

$$X_{2m+1}=\frac{(2m+3)(2m+5)\ldots(4m+1)}{2.4.6\ldots 2m}\left[x^{2m+1}-\frac{m}{1}\frac{2m+1}{4m+1}x^{2m-1}\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(2m+1)(2m+3)}{(4m+1)(4m+3)}x^{2m-3}-\ldots\right]\text{*}),$$

производящая которыхъ есть функція $\sqrt{1-2xs+s^2}$, § 21, то знаменатели подходящихъ дробей разложенія (16) могутъ быть выражены

$$Q_n=\frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n-1)}X_n.$$

§ 32. Дробь (14) можетъ быть приведена къ слѣдующей

---

*) Legendre. *Exercices de calcul intégral.* 5-me partie, § X, формулы (h).

$$\frac{1}{c}\int_0^1 \frac{u^{-\mu}(1-u)^{-\lambda}}{y-u}du = y^{-1}F(1,1-\mu,2-\mu-\lambda,y^{-1}) =$$

$$\cfrac{1}{y-b_1-\cfrac{b_1 b_2}{y-b_2-b_3-\cfrac{b_3 b_4}{y-b_4-b_5-\ldots \cfrac{-b_{2m-1}b_{2m}}{y-b_{2m}-b_{2m+1}-\ldots}}}} \tag{17}$$

въ которой степени всѣхъ неполныхъ частныхъ равны единицѣ.

Напр.; по формулѣ (3) § 19 имѣемъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ku^2}}{x-u}du$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{m^2k+1}}\cdot\frac{2m}{m-x}F\left(1,\ 1+m^2k,\ 2+2m^2k,\frac{2m}{m-x}\right),\ m=\infty;$$

по формулѣ же (17) получаемъ

$$\frac{2m}{m-x}F\left(1,\,1+m^2k,\,2+2m^2k,\,\frac{2m}{m-x}\right)$$

$$=\cfrac{1}{\cfrac{m-x}{2m}-\cfrac{1}{2}-\cfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+2m^2k}}{\cfrac{m-x}{2m}-\cfrac{1}{2}-\cfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2+m^2k}{(3+2m^2k)(5+2m^2k)}}{\cfrac{m-x}{2m}-\cfrac{1}{2}-\cfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3+m^2k}{(5+2m^2k)(7+2m^2k)}}{\cfrac{m-x}{2m}-\cfrac{1}{2}-\cfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{4+m^2k}{(7+2m^2k)(9+2m^2k)}}{\cfrac{m-x}{2m}-\cfrac{1}{2}-\dots}}}}};$$

слѣдовательно, при безконечно большомъ m,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ku^2}}{x-u}\,du=\cfrac{\sqrt{\pi}}{x\sqrt{k}-\cfrac{1}{2x\sqrt{k}-\cfrac{2}{2x\sqrt{k}-\cfrac{3}{2x\sqrt{k}-\ldots}}}}\,,$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ku^2}}{x-u}\,du=\cfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2k}.\,x-\cfrac{1}{\sqrt{2k}.\,x-\cfrac{2}{\sqrt{2k}.\,x-\cfrac{3}{\sqrt{2k}.\,x-\ldots}}}} \qquad (18)$$

По формулѣ (4) § 19 имѣемъ

$$\int_{0}^{-\infty}\frac{e^{-ku}}{x-u}\,du$$

$$=-\frac{1}{1+mk}\,\frac{m}{m-x}\,F\left(1,\,1+mk,\,2+mk,\,\frac{m}{m-x}\right),\ m=\infty,$$

функція же

$$\frac{m}{m-x}\,F\left(1,\,1+mk,\,2+mk,\,\frac{m}{m-x}\right)$$

разлагается по формулѣ (17) въ непрерывную дробь

$$\frac{m}{m-x} F\left(1,\, 1+mk,\, 2+mk,\, \frac{m}{m-x}\right)$$

$$=\cfrac{1}{\cfrac{m-x}{m}-\cfrac{1+mk}{2+mk}-\cfrac{\cfrac{1^2.(1+mk)}{(2+mk)^2(3+mk)}}{\cfrac{m-x}{m}-\cfrac{4+mk+(2+mk)^3}{(2+mk)(3+mk)(4+mk)}-\cfrac{\cfrac{2^2.(2+mk)^2}{(3+mk)(4+mk)^2(5+mk)}}{\cfrac{m-x}{m}-\cfrac{2^2.(6+mk)+(3+mk)^2(4+mk)}{(4+mk)(5+mk)(6+mk)}-\cdots}}};$$

слѣдовательно, при безконечно большомъ m,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ku}}{x-u}du = \cfrac{1}{kx-1-\cfrac{1^2}{kx-3-\cfrac{2^2}{kx-5-\cfrac{3^2}{kx-7-\dots}}}} \text{ *)}. \tag{19}$$

§ 33. Займемся выраженіями для знаменателей подходящихъ дробей разложенія (17).

Значеніе цѣлой функціи n-ой степени

$$F(-n, \kappa-\lambda-\mu+1, 1-\mu, y) = V_n$$

для $y = u$ обозначимъ чрезъ U_n, а чрезъ W_n цѣлую функцію отъ y, опредѣленную соотношеніемъ

$$\int_0^1 \frac{u^{-\mu}(1-u)^{-\lambda}}{y-u}(V_n-U_n)du = W_n,$$

откуда

$$V_n \int_0^1 \frac{u^{-\mu}(1-u)^{-\lambda}}{y-u}du = W_n + \int_0^1 \frac{u^{-\mu}(1-u)^{-\lambda}}{y-u}U_n du.$$

Изъ этого уравненія, такъ какъ

$$\int_0^1 \frac{u^{-\mu}(1-u)^{-\lambda}}{y-u}du = \frac{c}{y}F(1, 1-\mu, 2-\mu-\lambda, y^{-1}) \tag{20}$$

и, по формулѣ (13) § 21,

---

*) Разложенія (18) и (19) выведены П. Л. Чебышевымъ въ сообщеніи *Sur le développement des fonctions à une seule variable.* (*Bulletin de l' Académie de S. Pétersbourg.* T. I).

$$\int_0^1 \frac{u^{-\mu}(1-u)^{-\lambda}}{y-u} F(-n, n-\lambda-\mu+1, 1-\mu, u)du$$

$$= C_0 \int_0^1 \frac{u^{n-\mu}(1-u)^{n-\lambda}}{(y-u)^{n+1}} du,$$

слѣдуетъ

$$c\, F(-n, n-\lambda-\mu+1, 1-\mu, y).\ y^{-1}F(1, 1-\mu, 2-\mu-\lambda, y^{-1})$$

$$= W_n + C_0 \int_0^1 \frac{u^{n-\mu}(1-u)^{n-\lambda}}{(y-u)^{n+1}} du, \qquad (21)$$

гдѣ интегралъ, разложенный по нисходящимъ степенямъ перемѣнной y, относительно y есть функція $-(n+1)$-ой степени. По этому уравненію, функція

$$y^{-1}F(1, 1-\mu, 2-\mu-\lambda, y^{-1}),$$

умноженная на цѣлую функцію n-ой степени

$$F(-n, n-\lambda-\mu+1, 1-\mu, y),$$

даетъ цѣлую функцію и функцію $-(n+1)$-ой степени. Для того чтобъ доказать, что функція

$$F(-n, n-\lambda-\mu+1, 1-\lambda, y),$$

есть знаменатель подходящей дроби, въ которую разлагается функція (20) по формулѣ (17), докажемъ сперва слѣдующую лемму.

Если цѣлыя функціи P_m и Q_m не имѣютъ общаго множителя, если степень функціи P_m есть n, степень же функціи R_m меньше $-n$, и если

$$\varphi(y)Q_m = P_m + R_m, \qquad (22)$$

то функція Q_m будетъ знаменателемъ подходящей дроби этой непрерывной дроби, въ которую разлагается функція $\varphi(y)$.

Допустимъ, что $\frac{P_m}{Q_m}$ есть подходящая дробь разложенія функціи $\varphi(y)$, такъ что

$$\frac{P_m}{Q_m} = q_0 + \cfrac{a_1}{q_1 + \cfrac{a_2}{q_2 + \cfrac{a_3}{q_3 + \cdots + \cfrac{a_{m-1}}{q_{m-1}}}}},$$

при постоянныхъ

$$a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}.$$

Тогда

$$\varphi(y) = q_0 + \cfrac{a_1}{q_1 + \cdots + \cfrac{a_{m-1}}{q_{m-1} + \cfrac{a_m}{z}}},$$

гдѣ z есть полное частное, и

$$\varphi(y) = \frac{zP_m + a_m P_{m-1}}{zQ_m + a_m Q_{m-1}}.$$

$\frac{P_m}{Q_m}$ будетъ дѣйствительно подходящею дробью разложенія функціи $\varphi(y)$, если только степень полнаго частнаго z больше нуля.

Такъ какъ

$$\frac{R_m}{Q_m} = \varphi(y) - \frac{P_m}{Q_m} = \frac{zP_m + a_m P_{m-1}}{zQ_m + a_m Q_{m-1}} - \frac{P_m}{Q_m}$$

$$= \frac{a_m(P_{m-1}Q_m - P_m Q_{m-1})}{Q_m(zQ_m + a_m Q_{m-1})}$$

$$= \frac{\pm a_1 a_2 \ldots a_m}{Q_m(zQ_m + a_m Q_{m-1})},$$

то

$$z = \frac{\pm a_1 a_2 \ldots a_m - a_m R_m Q_{m-1}}{Q_m R_m}.$$

Въ числителѣ этой дроби, степень функціи R_m меньше $-n$, функціи же Q_{m-1} — не больше $+n$; слѣдовательно, второй членъ числителя меньше чѣмъ нулевой степени, самъ же числитель—нулевой степени. Въ знаменателѣ степень функціи Q_m есть n, функціи же R_m есть меньше $-n$; поэтому знаменатель будетъ степени менѣе чѣмъ нулевой. Слѣдовательно дробь, представляющая полное частное z есть степени больше нуля, ч. с. д.—

Въ уравненіи (21), соотвѣтствующемъ уравненію (22), функціи V_n и W_n не имѣютъ общаго множителя.

Если допустить, что функція

$$(y-c_1)(y-c_2)\ldots(y-c_\delta)=\chi(y),$$

степень которой есть δ, представляетъ общій множитель функцій V_n и W_n, такъ что

$$\frac{V_n}{\chi(y)}=v_n,\ \frac{W_n}{\chi(y)}=w_n$$

суть цѣлыя функціи, то можно доказать, что δ не можетъ быть больше нуля.

Положимъ

$$\varphi(y)v_n-w_n=r_n;$$

степень функціи v_n есть $n-\delta$, степень же функціи r_n—

$$-(n+\delta+1)<-(n-\delta);$$

слѣдовательно исполнены условія, при которыхъ можно примѣнять только что доказанную лемму. Такимъ же образомъ, какъ выше, приходимъ къ выраженію

$$r_n = \frac{\pm a_1\, a_2 \ldots a_m}{zv_n + a_m Q_{m-1}},$$

гдѣ степень Q_{m-1}, знаменателя предыдущей подходящей дроби, ниже степени v_n. Изъ этого выраженія видно, что степень функціи v_n равняется степени произведенія zv_n, взятой съ противоположнымъ знакомъ, или, что степень функціи zv_n есть $n+\delta+1$. Такъ какъ степень функціи v_n есть $n-\delta$, то степень полнаго частнаго z есть $2\delta+1$. Слѣдовательно, еслибъ δ было больше нуля, то степень полнаго частнаго была-бы больше единицы, что въ разбираемомъ случаѣ не возможно, такъ какъ степени неполныхъ частныхъ разложенія (17) не больше единицы.

Итакъ, функціи V_n, W_n и

$$\int_0^1 \frac{u^{n-\mu}(1-u)^{n-\lambda}}{(y-u)^{n+1}}\, du$$

удовлетворяютъ всѣмъ предположеніямъ, сдѣланнымъ въ доказанной леммѣ относительно функцій Q_m, P_m и R_m, вслѣдствіе чего функціи

$$V_1,\ V_2,\ \ldots$$

будутъ знаменателями тѣхъ подходящихъ дробей, которыя получаемъ, останавливаясь въ разложнніи (18) послѣдовательно на

$$y-b_1,\ y-b_2-b_3,\ \ldots.$$

Не трудно опредѣлить постоянную, на которую умноженная, функція V_n точно представитъ знаменателя n-ой подходящей дроби разложенія (17). Въ функціи

$$V_n = F(-n,\ n-\lambda-\mu+1,\ 1-\mu, y)$$

членъ, не зависящій отъ перемѣнной y, равняется единицѣ; въ знаменателѣ же n-ой подходящей дроби разложенія (17) онъ равенъ произведенію

$$(-1)^n b_1 b_3 b_5 \ldots b_{2n-1} = (-1)^n \frac{\Gamma(n-\mu+1)\Gamma(n-\lambda-\mu+1)}{\Gamma(2n-\lambda-\mu+1)\Gamma(1-\mu)},$$

или, по формулѣ (39) § 11,

$$= \frac{1.2..n}{\frac{d^n}{dy^n}F(-n, n-\lambda-\mu+1, 1-\mu, y)},$$

такъ что знаменатель n-ой подходящей дроби есть

$$\frac{1.2\ldots nF(-n, n-\lambda-\mu+1, 1-\mu, y)}{\frac{d^n}{dy^n}F(-n, n-\lambda-\mu+1, 1-\mu, y)} = \frac{1.2\ldots nT_n}{\frac{d^n}{dy^n}T_n}$$

гдѣ T_n есть функція подобная функціямъ Лежандра, производящая которой есть функція $F(s, 1-2y)$, (§21).

Слѣдовательно, въ разложеніи

$$\frac{\Gamma(2-\lambda-\mu)}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(1-\mu)}\int_0^1 \frac{u^{-\mu}(1-u)^{-\lambda}}{y-u}du = y^{-1}F(1, 1-\mu, 2-\lambda-\mu, y^{-1})$$

$$= \cfrac{1}{y-b_1-\cfrac{b_1 b_2}{y-b_2-b_3-\cfrac{b_3 b_4}{y-b_4-b_5-\ldots-\cfrac{b_{2n-1}b_{2n}}{y-b_{2n}-b_{2n+1}-\ldots}}}},$$

при $y=\frac{1-x}{2}$, знаменатели подходящихъ дробей, которыя получаемъ, останавливаясь послѣдовательно на

$$1, y-b_1, y-b_2-b_3, \ldots,$$

суть по очереди

$$Q_0 = F(0, 1-\lambda-\mu, 1-\mu, y) = 1,$$

$$Q_1 = -\frac{1-\mu}{2-\lambda-\mu} F(-1, 2-\lambda-\mu, 1-\mu, y) = \frac{T_1}{\frac{d}{dy}T_1} = -\frac{T_1}{2\frac{d}{dx}T_1},$$

$$Q_2 = +\frac{(1-\mu)(2-\mu)}{(3-\lambda-\mu)(4-\lambda-\mu)} F(-2, 3-\lambda-\mu, 1-\mu, y)$$

$$= \frac{1.2 T_2}{\frac{d^2}{dy^2}T_2} = +\frac{1.\ 2\ T_2}{2^2\frac{d^2}{dx^2}T_2},$$

. . . .,

$$Q_n = (-1)^n \frac{\Gamma(n-\mu+1)\Gamma(n-\lambda-\mu+1)}{\Gamma(2n-\lambda-\mu+1)\Gamma(1-\mu)}$$

$$.F(-n, n-\lambda-\mu+1, 1-\mu, y)$$

$$= \frac{1.2\ldots n T_n}{\frac{d^n}{dy^n}T_n} = (-1)^n \frac{1.2\ldots n T_n}{2^n \frac{d^n}{dx^n}T_n},$$

. . . .

Положенія.

1. Каждая функція, удовлетворяющая дифференціальному уравненію

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0,$$

есть конечная, сплошная и однозначная во всѣхъ точкахъ координатной плоскости перемѣнной x, не лежащихъ на оси абсциссъ.

2. Гипергеометрическая функція $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ есть функція конечная, сплошная и однозначная во всѣхъ точкахъ координатной плоскости перемѣнной x, не лежащихъ на прямой $+1 \ldots +\infty$.

3. Раздѣленіе на три групы интеграловъ Куммера, основанное на свойствахъ общихъ каждымъ двумъ классамъ Якоби, дозволяетъ нагляднѣе представить примѣнимость этихъ интеграловъ.

4. Указанные Якоби, при интегрированіи дифференціальнаго уравненія

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0,$$

девять возможныхъ случаевъ положительности или отрицательности аргументовъ α, β и γ можно распространить и на комлексныя значенія аргументовъ, удерживая за вещественными ихъ частями тѣ же предположенія, которыя поставлены Якоби относительно вещественныхъ аргументовъ.

5. Отношеніе

$$\frac{F(\alpha+\vartheta,\ \beta+\eta,\ \gamma+\zeta,\ x)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)},$$

не только для значеній 0, $+1$ и -1, но и для всѣхъ цѣлыхъ значеній чиселъ ϑ, η и ζ, можетъ быть разложено въ непрерывную дробь, стремящуюся въ предѣлѣ къ этому отношенію для всѣхъ точекъ координатной плоскости перемѣнной x, не лежащихъ на прямой $+1 \ldots +\infty$ и не обращающихъ въ нуль функціи $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

6. Знаменатели подходящихъ дробей разложенія гипергеометрической функціи $F(1, \beta, \gamma, x^{-1})$ въ непрерывную дробь суть функціи T_n, подобныя функціямъ Лежандра, производящая которыхъ есть функція $F(s,\ 1-2x)$.

стран.	6	*стр.*	19	*вмѣсто*	функцію	*должно*	*быть*	функціи
›	40	›	3	›	$\zeta-\gamma-\alpha$	›	›	$\zeta+\gamma-\alpha$
›	46	›	4 и 6	›	dt^n	›	›	dv^n

Опечатки въ диссертаціи

Ueber gegen einander permutable Substitutionen[1].

стран.	13	строка	8 и 18	вмѣсто	$\equiv$ (mod	должно быть	$\equiv \zeta$(mod
»	13	»	37	»	$\equiv$ (mod	»	$\equiv 0$(mod
»	17	»	33	»	α	»	a
»	26	»	13	»	$\equiv$ (mod	»	$\equiv \xi$ (mod
»	30	»	7	»	Q	»	Θ
»	31	»	29	»	ϙ	»	ρ

---

[1]) Leipzig. 1871.